А. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. А. ШЫНЫБЕКОВ,
Р. Н. ЖУМАБАЕВ

АЛГЕБРА

Учебник для 8 класса
общеобразовательной школы

8

Рекомендовано Министерством образования и
науки Республики Казахстан

Алматы «Атамұра» 2018

УДК 373.167.1
ББК 22. 14 я 72
Ш 97

Учебник подготовлен в соответствии с Типовой учебной программой по предмету «Алгебра» для 8 класса уровня основного среднего образования по обновленному содержанию, утвержденной Министерством образования и науки РК.

Под редакцией **М. Отелбаева** – доктора физико-математических наук, профессора, академика НАН Республики Казахстан.

Условные обозначения:

Вопросы по основным материалам темы

Практические задания

Материалы из истории

A Упражнения первого уровня сложности

B Упражнения второго уровня сложности

C Упражнения третьего уровня сложности

* Упражнения повышенной трудности и творческого характера

▲ Начало решения (доказательства) задачи

■ Конец решения (доказательства) задачи

Шныбеков А. Н. и др.
Ш 97 **Алгебра:** Учебник для 8 кл. общеобразоват. шк./А.Н. Шныбеков, Д.А. Шныбеков, Р.Н. Жумабаев — Алматы: Атамұра, 2018. — 208с.

ISBN 978-601-331-160-9

УДК 373.167.1
ББК 22. 14 я 72

ISBN 978-601-331-160-9

Предисловие

Данный учебник, предназначенный для 8 классов общеобразовательных школ, имеет ряд специфических особенностей. А именно, по сравнению с другими ранее издававшимися учебниками в нем полностью охвачены как материал по программе общеобразовательных школ, так и материал по программе школ и классов с углубленным изучением математики. Остановимся на некоторых правилах пользования данным учебником.

Задачи и упражнения, приведенные в учебнике, после каждой темы по степени сложности условно разделены на три группы: **A**, **B** и **C**. В группах **A** и **B** сосредоточены соответственно легкие задачи и задачи средней сложности, а задачи из группы **C**, в основном, предназначены для учащихся классов с углубленным изучением математики. Тем не менее, учащиеся, обладающие математическими способностями, могут самостоятельно изучить эти материалы во внеурочное время. Рекомендуем способным учащимся самостоятельно изучить дополнительный материал по программе углубленного изучения математики, так как усвоение этого материала способствует результативному участию в математических олимпиадах и конкурсах. Кроме того, должно войти в привычку умение отвечать на теоретические вопросы и выполнять практические задания, приведенные в конце каждой темы.

Неустанный поиск, неутомимый труд и высокое стремление, несомненно, принесут свои плоды.

Авторы

Раздел 0. Повторение материала, пройденного в 7 классе

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- вспомним и повторим материалы, пройденные в 7 классе;
- проведем подготовку для изучения новых материалов.

1) Что такое степень числа с натуральным показателем?

2) Как вы понимаете понятие степени числа с целым отрицательным показателем?

3) Степень числа a с показателем n пишется так: a^n. Покажите основание и показатель данной степени.

4) Какие свойства степени числа с целым натуральным показателем вы знаете? Сформулируйте свойства степени с целым показателем, приведите пример.

5) Как разложить натуральное число на сумму разрядных слагаемых? Приведите пример.

6) Стандартный вид числа пишется так: $a \cdot 10^n$, $1 \leqslant a < 10$. Назовите его значащую часть и порядок. Приведите пример.

7) Что называется абсолютной (относительной) погрешностью приближенного значения числа? Приведите пример.

8) Что называется одночленом? Что вы понимаете под стандартным видом одночлена, коэффициентом и порядком одночлена? Покажите это на примере.

9) Как выполняют действия умножения и возведения в степень одночленов? Покажите это на примере.

10) Что такое многочлен? Как привести его к стандартному виду, найти его степень? Приведите пример.

11) Что такое подобные члены и как их объединяют? Покажите это на примере и приведите устное объяснение.

12) Как выполняют действие умножения одночлена на многочлен, многочлена на многочлен? Приведите пример.

13) Что вы понимаете под функцией? Какими способами может быть задана функция? Приведите пример.

14) Что такое график функции? Как его строят? Приведите пример.

15) Что вы понимаете под функцией прямой пропорциональности? Как определяют его угловой коэффициент? Приведите пример.

16) Какая функция называется линейной? Поясните геометрический смысл свободного члена и покажите это на рисунке, графике.

17) Как можно определить особенности расположения прямой на координатной плоскости по угловому коэффициенту и свободному члену? Приведите пример.

18) Запишите линейную функцию, график которой изображен на рис. 0.1.

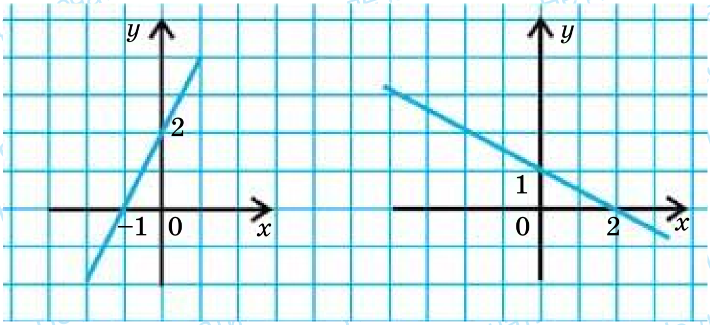


Рис. 0.1

19) Что называется линейным уравнением с двумя переменными? Как строится график этого уравнения?

20) С помощью примера объясните суть графического решения системы линейных уравнений с двумя переменными.

21) Как называются графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$?

22) Как располагаются графики функций $y = ax^2$ и $y = ax^3$ в зависимости от значений коэффициентов a? Объясните это на примере.

23) Какая функция называется функцией обратной пропорциональности? Как называется ее график? Как он располагается в зависимости от значения коэффициента обратной пропорциональности?

24) Что вы понимаете под генеральной совокупностью, случайной выборкой, вариационным рядом и вариантой? Приведите пример.

25) Что такое абсолютная (относительная) частота, варианта? Приведите пример.

26) Как составляется таблица абсолютных (относительных) частот вариационного ряда? Приведите пример.

27) Как строится полигон частот (относительных частот) вариационного ряда? Приведите пример.

28) Сформулируйте правила сокращенного умножения и запишите соответствующую формулу.

29) Что такое математическая модель? Как вы это понимаете? Приведите пример.

30) На какие этапы делится процесс решения текстовых задач? На примере поясните смысл каждого этапа.

31) Что вы понимаете под рациональной дробью? Приведите пример. Запишите основное свойство дроби.

32) Что вы понимаете под рациональным выражением, тождественным преобразованием рационального выражения? Приведите пример.

33) Как выполняются действия в рациональных выражениях (дробях)? Приведите пример.

Упражнения для повторения материала, пройденного в 7 классе

А

0.1. Запишите выражение в виде степени с основанием a:

1) $(a^5)^3 \cdot a$; 2) $a \cdot a^3 \cdot a^2$ 3) $((a^3)^2)^4$;
4) $(-a^3)^2$; 5) $(a^2 \cdot a^3)^2$; 6) $(a^2)^5 : (a^3)^2$;
7) $(a^3)^4 : (a^2)^5$; 8) $\left(\frac{a^4}{a^2}\right)^3$.

5) ▲ $(a^2 \cdot a^3)^2 = (a^{2+3})^2 = (a^5)^2 = a^{5 \cdot 2} = a^{10}$ ■

0.2. Вычислите:

1) $\frac{15^9 \cdot 15^5}{15^{13}}$; 2) $5^{15} \cdot 5^{-17} \cdot 5^4$; 3) $\frac{0,4^{11}}{0,4^4 \cdot 0,4^5}$;
4) $8^{-2} \cdot 4^3$; 5) $9^0 : 9^{-2}$; 6) $7^8 \cdot 7^{-5} \cdot 7^{-4}$.

0.3. Упростите выражение:

1) $-0,4x^2y \cdot (-10xy^2)$; 2) $-0,2a^3b^4 \cdot 5a^2b^3$;
3) $(0,25x^{-2}y^{-1})^{-3}$; 4) $\left(\frac{x^{-3}a^4}{16}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{x^{-2}a^3}\right)^{-3}$;
5 $ab(-5ab^2) \cdot (4a^2b)$; 6) $m^2n \cdot (-mn) \cdot (-mn^2)$.

4) ▲ $\left(\dfrac{x^{-3}a^{4}}{16}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{4}{x^{-2}a^{3}}\right)^{-3}=\dfrac{\left(x^{-3}\right)^{-2}\cdot\left(a^{4}\right)^{-2}}{(16)^{-2}}\cdot\dfrac{4^{-3}}{\left(x^{-2}\right)^{-3}\cdot\left(a^{3}\right)^{-3}}=$

$=\dfrac{x^{6}\cdot a^{-8}}{4^{-4}}\cdot\dfrac{4^{-3}}{x^{6}\cdot a^{-9}}=\dfrac{1}{4^{-1}\cdot a^{-1}}=4a$ ■

0.4. Выполните указанные действия и приведите многочлен к стандартному виду:

1) $(4a^2b-3ab^2)+(-a^2b+2ab^2)$;
2) $(y^2-3y)+(3y-2y^2)-(4-2y^2)$;
3) $2x^2-x(2x-5y)-y(2x-y)$;
4) $7m(3m+2n)-3m(7n-2m)$;
5) $(5p-4q)(2p-2q)$;
6) $(a^2-2ab)(a^2-5ab+3b^2)$.

0.5. Вынесите общий множитель за скобки:

1) $4x^3y-6x^2y^2$;
2) $5a^3-15a^2b+20ab^2$;
3) $6mn^2-9n^3+12m^2n^2$;
4) $-3xy^2-15x^2y-21x^2y^2$;
5) $12a^2b-18ab^2-30ab^3$;
6) $-6ax^2+9x^2-12x^4-3a^2x^2$.

5) ▲ $12a^2b-18ab^2-30ab^3=6ab\cdot 2a-6ab\cdot 3b-6ab\cdot 5b^2=$
$=6ab(2a-3b-5b^2)$ ■

0.6. Построен график функции $y=x^2$. Определите значения y, соответствующие значениям x, равным -1; $-0{,}5$; $0{,}5$; 2 (рис. 0.2).

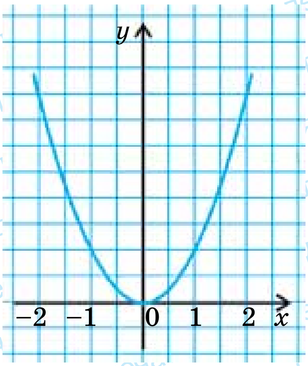


Рис. 0.2

0.7. Постройте график функции $y=x^3$. Определите значения y, соответствующие значениям x, равным $-1{,}5$; $-0{,}5$; $0{,}5$; $1{,}2$.

0.8. С помощью формул сокращенного умножения запишите выражение в виде многочлена:

1) $(2a+b)^2$; 2) $(0{,}2x-y)^2$;
3) $(5a-3x)^3$; 4) $\left(\dfrac{1}{2}m+2n\right)^3$;

5) $(3ab - x)(3ab + x)$;
6) $(-x - 2y)(-x + 2y)$;
7) $(0{,}2p + q)(q - 0{,}2p)$;
8) $(3 - a)(9 + 3a + a^2)$;
9) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$.

6) ▲ $(-x - 2y)(-x + 2y) = (-1)(x + 2y) \cdot (2y - x) = (-1)[(2y)^2 - x^2] = x^2 - 4y^2$ ■

0.9. Применяя формулы сокращенного умножения, разложите многочлен на множители:

1) $4x^2 - 9y^2$;
2) $-25a^2 + b^2$;
3) $27x^3 - y^3$;
4) $8a^3 + b^3$;
5) $4m^2 - 4mn + n^2$;
6) $8xy + y^2 + 16x^2$;
7) $m^3 + 125$;
8) $8a^3 - 27b^3$.

0.10. Выполните указанные действия:

1) $\dfrac{x}{x-y} + \dfrac{y}{y-x}$;
2) $\dfrac{2x+1}{a} + \dfrac{3x+1}{a} - \dfrac{x-2}{a}$;
3) $\dfrac{a}{12m} - \dfrac{b}{18n}$;
4) $\dfrac{3xy}{4mn} \cdot \dfrac{10m^2n^2}{21x^2y}$;
5) $-\dfrac{18a^2b^2}{5pq} : \dfrac{6ab}{5p^2q^2}$;
6) $\dfrac{x^2y - 4y^3}{3xy^2} \cdot \dfrac{yx^2}{x^2 - 2xy}$.

0.11. Разложите многочлен на множители:

1) $2a^2 - 4ab + 2b^2$;
2) $x^2 - y^2 + x + y$;
3) $5m^2 + 20mn + 20n^2$;
4) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$;
5) $(a - b)^3 - 3(a^2 - b^2)$;
6) $(m + n)^3 - n(m + n)^2$.

0.12. Постройте график функции $y = \dfrac{2}{x}$. Какая из точек $A(2;1)$, $B(2; -1)$, $C(1; 2)$ и $D(4; 2)$ лежит на графике данной функции?

0.13. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a}{a+1} + 1\right) \cdot \dfrac{1+a}{2a+1}$;
2) $\left(\dfrac{m}{n^2} - \dfrac{1}{m}\right) : \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)$;
3) $\dfrac{b-2}{b-3} \cdot \left(b + \dfrac{b}{2-b}\right)$;
4) $\left(\dfrac{4x}{2-x} - x\right) : \dfrac{x+2}{x-2}$.

0.14. Обратите дробь в десятичную периодическую дробь и округлите ее с точностью до сотых. Найдите абсолютную и относительную погрешности приближенного значения:

1) $\frac{1}{6}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) $5\frac{7}{12}$; 4) $12\frac{1}{3}$.

3) ▲
$$\begin{array}{r|l} -7{,}0 & 12 \\ \underline{6\,0} & 0{,}583\ldots \\ -1\,0\,0 & \\ \underline{9\,6} & \\ -40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

Откуда $5\frac{7}{12} = 5{,}5833\ldots = 5{,}58(3) \approx 5{,}58$. Абсолютная погрешность такова:

$$\left|5\frac{7}{12} - 5{,}58\right| = \left|\frac{67}{12} - \frac{558}{100}\right| = \frac{1}{300}.$$

Теперь найдем относительную погрешность.

$\left|5\frac{7}{12} - 5{,}58\right| : 5{,}58 = \frac{1}{300 \cdot 5{,}58} = \frac{1}{1674} \approx 0{,}00059\ldots \approx 0{,}0006$. Если умножить полученное число на 100%, то получим, что доля абсолютной погрешности по отношению к приближенному значению составляет всего $0{,}06\%$. ■

B

0.15. Упростите выражение:

1) $2a - 3b - (4a + 7b + c + 3)$;
2) $2xy - y^2 + (y^2 - xy) - (x^2 + xy)$;
3) $(-2x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 7) - (4x^2 + 2x + 8)$;
4) $(3a^2 - a + 2) + (-3a^2 + 3a - 1) - (a^2 - 1)$;
5) $(1 - x + 4x^2 - 8x^3) + (2x^3 + x^2 - 6x - 3) - (5x^3 - 8x^2)$;
6) $(0{,}5a - 0{,}6b + 5{,}5) - (-0{,}5a + 0{,}4b) + (1{,}3b - 4{,}5)$.

0.16. Упростите выражение:

1) $(x^2)^4 \cdot (x^4)^3$;
2) $(a^2 \cdot a^3)^4$;
3) $\frac{(mn)^2 \cdot m^3n^4}{m \cdot (mn)^3}$;
4) $\frac{(x^2y^3)^5}{(x^2)^2 \cdot y^5}$;

5) $\left(\dfrac{a^{-3}b^4}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{9}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$; 6) $\left(\dfrac{p^{-4}}{10q^5k^2}\right)^{-2} : \left(5p^2q^3k\right)^3$.

3) ▲ $\dfrac{(mn)^2 \cdot m^3 \cdot n^4}{m \cdot (m \cdot n)^3} = \dfrac{m^2 \cdot n^2 \cdot m^3 \cdot n^4}{m \cdot m^3 \cdot n^3} = \dfrac{m^5 \cdot n^6}{m^4 \cdot n^3} = m \cdot n^3$ ■

0.17. Упростите выражение:

1) $(x-2)(x+3)+(x-3)(x+2)$; 2) $(y-1)(y+2)+(y+1)(y-2)$;
3) $(a+1)(a+2)+(a+3)(a+4)$; 4) $(c-1)(c-2)+(c-3)(c-4)$.

0.18. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(x^2-x+4)(x-5)$; 2) $(2y-1)(y^2+5y-2)$;
3) $(2-3a)(-a^2+4a-8)$; 4) $(3-4c)(2c^2-c-1)$;
5) $(x^2-x+4)(2x^2-x+4)$; 6) $(-5a^2+2a+3)(4a^2-a+1)$;
7) $(8+4c)(2c^2-c-4)$; 8) $(c-4)(c+2)(c+3)$.

0.19. Решите уравнение:

1) $(x+1)(x+2)=(x-3)(x+4)$;
2) $(3x-1)(2x+7)-(x+1)(6x-5)=16$;
3) $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-1)+6$;
4) $(6y+2)(5-y)=47-(2y-3)(3y-1)$.

3) ▲ $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-1)+6 \Rightarrow 24-12y^2+15y-4y+5=$
$=22y-11-12y^2+6y+6 \Rightarrow 11y+29=28y-5 \Rightarrow 17y=34 \Rightarrow y=2$ ■

0.20. Разложите многочлен на множители:

1) a^3-2a^2-2a+4; 2) $x^3-12+6x^2-2x$;
3) $c^4-2c^2+c^3-2c$; 4) $-y^6-y^5+y^4+y^3$;
5) $a^2b-b^2c+a^2c-bc^2$; 6) $2x^3+xy^2-2x^2y-y^3$;
7) $16ab^2-10c^3+32ac^2-5b^2c$; 8) $6a^3-21a^2b+2ab^2-7b^3$;
9) $c^3+ac^2-4a-4c$.

5) ▲ $a^2b-b^2c+a^2c-bc^2=b(a^2-bc)+c(a^2-bc)=(a^2-bc)(b+c)$ ■

0.21. Решите уравнение:

1) $1{,}2x^2+x=0$ 2) $1{,}6x-x^2=0$; 3) $0{,}5x^2-x=0$;
4) $5x^2=x$; 5) $1{,}6x^2=3x$; 6) $x=x^2$.

0.22. Разложите многочлен на множители:

1) a^k+a^{k+1}; 2) $5x^{k+3}+10x^3$; 3) $4x^{k+2}+20x^k$;
4) $y^{k+2}-y$; 5) $a^kb^{2k}+a^kb^k$; 6) $15x^{2k+1}-25x^{k+1}$.

0.23. Покажите, что выражение: 1) 41^3+19^3 делится на 60; 2) 79^3-29^3 делится на 50; 3) 66^3+34^3 делится на 400; 4) 54^3-24^3 делится на 1080.

0.24. Докажите тождество:

1) $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$;
2) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;
3) $a^5+1=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$;
4) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

0.25. Выделите полный квадрат квадратного трехчлена:

1) $x^2-6x-16$; 2) $x^2+12x+20$;
3) x^2-5x+6; 4) x^2+x-2;
5) x^2-4x+3; 6) $x^2-3x-10$;
7) $x^2+9x+14$; 8) $x^2-2x-35$.

6) ▲ $x^2-3x-10=$

$$=x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-10-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-10-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$$ ■

0.26. Найдите значение дроби:

1) $\dfrac{8^{16}}{16^{12}}$; 2) $\dfrac{81^{25}}{27^{33}}$; 3) $\dfrac{15a^2-10ab}{3ab-2b^2}$ при $a=-2$, $b=-0{,}1$;

4) $\dfrac{9c^2-4b}{18c^2-12bc}$ при $b=0{,}5$, $c=\dfrac{2}{3}$.

0.27. Сократите дробь:

1) $\dfrac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$; 2) $\dfrac{7p-35}{15-3p}$; 3) $\dfrac{18a-3a^2}{8a^2-48a}$;

4) $\dfrac{4-x^2}{10-5x}$; 5) $\dfrac{a^2+3a+9}{27-a^3}$; 6) $\dfrac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$;

7) $\dfrac{x^6-x^8}{x^4-x^2}$; 8) $\dfrac{b^7-b^{10}}{b^9-b^3}$; 9) $\dfrac{c^6-c^4}{c^3+c^2}$.

0.28. Преобразуйте дробь: 1) $\frac{x}{a-b}$ так, чтобы ее знаменатель был равен $(a-b)^2$; 2) $\frac{2y}{x-1}$ так, чтобы ее знаменатель был равен x^3-1; 3) $\frac{y}{x-a}$ так, чтобы ее знаменатель был равен x^2-a^2; 4) $\frac{3a}{a^2+ab+b^2}$ так, чтобы ее знаменатель был равен a^3-b^3; 5) $\frac{8}{3xy^2}$ так, чтобы ее знаменатель был равен $15x^2y^2$; 6) $\frac{b}{7a^2c}$ так, чтобы ее знаменатель был равен $35a^3c^3$; 7) $\frac{a}{a-2}$ так, чтобы ее знаменатель был равен a^2-2a; 8) $\frac{1}{x+1}$ так, чтобы ее знаменатель был равен x^3+1.

4) ▲ $\frac{3a}{a^2+ab+b^2}=\frac{3a(a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{3a(a-b)}{a^3-b^3}$ ■

0.29. Преобразуйте выражение в многочлен:

1) $\frac{(y-b)^2}{y-b+1}+\frac{y-b}{y-b+1}$;

2) $\frac{(a+x)^2}{a+x-2}-\frac{2a+2x}{a+x-2}$;

3) $\frac{x^2-y^2}{x-y+1}+\frac{x+y}{x-y+1}$;

4) $\frac{b^2-9c^2}{b+3c-2}+\frac{2(b-3c)}{2-b-3c}$.

2) ▲ $\frac{(a+x)^2}{a+x-2}-\frac{2a+2x}{a+x-2}=\frac{(a+x)^2-2(a+x)}{a+x-2}=\frac{(a+x)(a+x-2)}{a+x-2}=a+x$ ■

0.30. Представьте в виде дроби:

1) $x+y+\frac{x-y}{4}$;

2) $a-\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$;

3) $m+n-\frac{1+mn}{n}$;

4) $\frac{3ax-y^2}{3ax+y^2}-1$;

5) $a^2-b^2-\frac{a^3-b^3}{a+b}$;

6) $(1-x)^2-\frac{1+x^4}{(1+x)^2}$.

0.31. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2b-b^3}\right)^2$;

2) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)^2:\left[\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{y}{x}\right)\right]$;

3) $\left(\dfrac{1}{(2a-b)^2}+\dfrac{2}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{(2a+b)^2}\right)\cdot\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{16a}$;

4) $\dfrac{4c^2}{(c-2)^2}:\left(\dfrac{1}{(c+2)^2}+\dfrac{1}{(c-2)^2}+\dfrac{2}{c^2-4}\right)$.

0.32. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1}{p-2u}+\dfrac{6u}{4u^2-p^2}-\dfrac{2}{p+2u}=-\dfrac{1}{2p}\cdot\left(\dfrac{p^2+4u^2}{p^2-4u^2}+1\right)$;

2) $\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2:\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{x+y}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right)=1$;

3) $\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2\left(x^2-y^2\right)+(x-y)^2}=1$.

3) ▲ 1-й способ. $\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}=$

$=\dfrac{4x^2}{x^2+2xy+y^2+2x^2-2y^2+x^2-2xy+y^2}=\dfrac{4x^2}{4x^2}=1;$

2-й способ. $\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2\left(x^2-y^2\right)+(x-y)^2}=\dfrac{4x^2}{\left[(x+y)^2+x^2-y^2\right]+\left[x^2-y^2+(x-y)^2\right]}=$

$=\dfrac{4x^2}{(x+y)(x+y+x-y)+(x-y)(x+y+x-y)}=$

$=\dfrac{4x^2}{2x(x+y)+2x(x-y)}=\dfrac{4x^2}{2x(x+y+x-y)}=\dfrac{4x^2}{4x^2}=1;$

3-й способ. $\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2(x+y)(x-y)+(x-y)^2}=\dfrac{4x^2}{(x+y+x-y)^2}=\dfrac{4x^2}{(2x)^2}=1.$ ■

C

0.33. Разложите выражение x^8 на множители так, чтобы один из сомножителей был равен: 1) x^2; 2) x^5; 3) x^7; 4) x^8; 5) x^{10}; 6) x^{12}.

0.34. Если справа от задуманного числа приписать цифру 0 и вычесть полученное число из 143, то получим число, в три раза превышающее задуманное. Какое число было задумано?

0.35. Если справа от данного числа приписать цифру 9 и к полученному числу прибавить удвоенное данное число, то сумма будет равна 633. Найдите данное число.

▲ Если справа от данного числа x приписать цифру 9, то получится число $x \cdot 10 + 9$. Тогда, по условию задания, выполняется равенство $10x + 9 + 2x = 633$. Откуда $12x = 624$, $x = 52$. ■

0.36. Если слева от данного трехзначного числа приписать цифру 8 и к полученному четырехзначному числу прибавить 5572, то сумма превысит данное трехзначное число в 40 раз. Найдите это трехзначное число.

0.37. Докажите справедливость формулы для каждого натурального значения n:

1) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$;
2) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$;
3) $x^{2n+1} + 1 = (x+1)(x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots - x + 1)$;
4) $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n})$.

0.38. Покажите, что: 1) разность $143^{15} - 81^{15}$ делится на 62; 2) сумма $23^{13} + 1$ делится на 12; 3) сумма $16^{17} + 1$ делится на 17.

0.39. Упростите выражение:

1) $32a^5 + \dfrac{16a^4b}{c} + \dfrac{8a^3b^2}{c^2} + \dfrac{4a^2b^3}{c^3} + \dfrac{2ab^4}{c^4} + \dfrac{b^5}{c^5}$;

2) $81x^4 - 54x^3yz + 36x^2y^2z^2 - 24xy^3z^3 + 16y^4z^4$.

0.40. Докажите, что: 1) сумма $12^{31} + 28^{31}$ кратна 80; 2) разность $125^{220} - 15^{220}$ кратна 220; 3) сумма $11^{11} + 13$ кратна 12; 4) сумма $6^{41} + 8$ кратна 7.

0.41*. Покажите, что при каждом натуральном n выражение: 1) $21^n + 4^{n+2}$ делится на 17; 2) $5^{2n+1} + 11^{2n+1} + 2$ делится на 6; 3) $5^n + 8^n - 2^{n+1}$ делится на 3; 4) $3^n + 5^n + 7^n + 9^n$ делится на 4.

> 1) ▲ $21^n + 4^{n+2} = 21^n - 4^n + 16 \cdot 4^n + 4^n = (21-4)(21^{n-1} + \ldots + 4^{n-1}) + 4^n(16+1) = 17 \cdot (21^{n-1} + \ldots + 4^{n-1}) + 17 \cdot 4^n$ кратно 17 ■

0.42*. Покажите, что выражение $5^n - 3^n + 2^n$ при каждом натуральном n кратно 4.

0.43. Докажите тождество:

$$2b^5 + (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a-b) = (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a+b).$$

0.44. Запишите выражение $2(3a-2)^2 - 3a(3a-2) + 1$ в виде квадрата двучлена.

0.45. Запишите выражение: 1) $2a^2 + 2b^2$ в виде суммы квадратов двух многочленов; 2) $4ab$ в виде разности квадратов двух многочленов.

0.46. Запишите выражение $x(8x+3y)^2 - 2y(6x+0{,}25y)^2$ в виде куба двучлена.

0.47*. Запишите выражение $2a(a^2+3b^2)$ в виде суммы кубов двух многочленов.

0.48*. Запишите выражение $2b(3a^2+b^2)$ в виде разности кубов двух многочленов.

0.49. Найдите коэффициенты a, b и c так, чтобы выполнялось равенство $2x^4 + x^3 - 15x^2 - 83x - 45 = (ax^2 + bx + c)(x^2 + 4x + 9)$.

0.50*. Составьте многочлен 6-й степени, зависящий от x, такой, чтобы он при каждом значении x принимал только: 1) положительные; 2) отрицательные значения.

0.51*. Покажите, что число $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + 1$ является квадратом некоторого натурального числа n. Найдите это число n.

0.52. Сократите дробь:

1) $\dfrac{(4x-y)(2x+y)+(4x+2y)^2}{4x^2+xy}$; 2) $\dfrac{a^4+a^3+4a^2+3a+3}{a^3-1}$;

3) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}$; 4) $\dfrac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}$.

2) ▲ $\dfrac{a^4+a^3+4a^2+3a+3}{a^3-1}=\dfrac{a^4+a^3+a^2+3a^2+3a+3}{(a-1)(a^2+a+1)}=$

$=\dfrac{(a^2+3)\cdot(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}=\dfrac{a^3+3}{a-1}$ ■

0.53. Найдите значение выражения, если $\dfrac{x+y}{y}=3$:

1) $\dfrac{x}{y}$; 2) $\dfrac{y}{x+y}$; 3) $\dfrac{x-y}{y}$; 4) $\dfrac{y}{x}$.

0.54. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\dfrac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\dfrac{1}{a-1}\right):\dfrac{a^2+1}{1-a}$;

2) $\left(\dfrac{2p}{2p-u}-\dfrac{4p^2}{4p^2+4pu+u^2}\right):\left(\dfrac{2p}{u^2-4p^2}+\dfrac{1}{2p-u}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}-1\right)$;

4) $\left(\dfrac{p}{p^2-4}+\dfrac{2}{2-p}+\dfrac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\dfrac{10-p^2}{p+2}\right)$;

5) $\dfrac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+2ab+b^2}+\dfrac{2a}{b^2-a^2}$;

6) $\dfrac{a-5}{a^2-18a+81}+\dfrac{5-3a}{18a-81-a^2}+\dfrac{131+2a}{(9-a)^2}$;

7) $\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$;

8) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

0.55. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{2m+1}{2m-1}-\dfrac{2m-1}{2m+1}\right):\dfrac{4m}{10m-5}$;

3) $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\dfrac{4a^2-4}{3}$;

4) $\left(\dfrac{5a}{a+x}+\dfrac{5x}{a-x}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\right)$.

Раздел 1. Квадратный корень и иррациональные выражения

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:
- усвоим понятия иррационального и действительного чисел;
- будем знать определения и различать понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня;
- будем применять свойства арифметического квадратного корня;
- будем оценивать значение квадратного корня;
- будем выносить множитель из-под знака корня и вносить множитель под знак корня;
- будем освобождать от иррациональности знаменатель дроби;
- будем выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни;
- будем сравнивать действительные числа;
- будем знать свойства функции $y=\sqrt{x}$ и строить ее график;
- будем находить значения функции по заданным значениям аргумента и находить значение аргумента по заданным значениям функции.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Понятие квадратного корня

Пример 1. Площадь квадрата равна 144 см². Найти его сторону x (рис. 1.1).

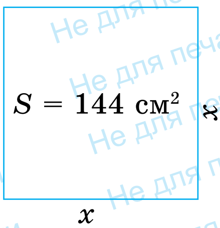


Рис. 1.1

▲ Формула площади квадрата $S = x^2$.

Тогда $\left.\begin{matrix} S=x^2 \\ S=144 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 = 144$. Итак,

нужно найти число, квадрат которого равен 144. Т.к. $12^2 = 144$, то $x = 12$ см. ■

Определение. **Квадратным корнем** числа a называется число, квадрат которого равен a. Вычисление квадратных корней называют также извлечением квадратных корней.

Число 12 является квадратным корнем из числа 144. Число –12 также является квадратным корнем из числа 144, т. к. $(-12)^2 = 144$.

Действие извлечения квадратного корня	Действие возведения в квадрат

Взаимно обратные действия

Подкоренное число	Значение квадратного корня равно	т.к.
25	5 и (–5)	$5^2 = 25$ $(-5)^2 = 25$
0,36	0,6 и –0,6	$0{,}6^2 = 0{,}36$ $(-0{,}6)^2 = 0{,}36$

$a = x^2 \geqslant 0$	Квадратный корень извлекается только из неотрицательного числа.

$0^2 = 0 \Rightarrow$ квадратный корень из 0 имеет только одно значение, равное нулю.

Арифметический квадратный корень

Определение. Неотрицательный квадратный корень из неотрицательного числа называется **арифметическим квадратным корнем.**

Арифметический квадратный корень из числа $a \geqslant 0$ обозначается символом $\sqrt{a}$, где $\sqrt{\ }$ – знак арифметического квадратного корня.

$\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{9} = 3$;

$\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$; $\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} a \geqslant 0 \\ \sqrt{a} = b \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} b^2 = a \\ b \geqslant 0 \end{array}$$

$\sqrt{2^2} = 2$;

$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2)$.

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Поэтому $\sqrt{x^2} = |x|$.

Если $a < 0$, то $\sqrt{a}$ не имеет смысла.
Выражения $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-0,01}$ не имеют смысла.

Свойства арифметического квадратного корня:

1) *областью определения (областью допустимых значений)* $\sqrt{a}$ *является множество всех неотрицательных чисел:* $a \geqslant 0$;

2) $\sqrt{a} \geqslant 0$ – *арифметический квадратный корень есть неотрицательное число;*

3) *уравнение* $x^2 = a,\ a > 0$ *имеет два корня:* $x = \pm\sqrt{a}$;

4) *для любого числа x верно равенство* $\sqrt{x^2} = |x|$.

1. Какое число называется квадратным корнем из числа?
2. Как называется действие нахождения значения квадратного корня?
3. Каким должно быть число, чтобы можно было извлечь квадратный корень из него?
4. Сколько значений имеет квадратный корень из данного положительного числа?
5. Квадратный корень из какого числа имеет одно значение?
6. Какое число называется арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа? Как его обозначают?
7. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = a,\ a \geqslant 0$? Напишите их.

Практическая работа

Постройте квадрат, площадь которого равна: 1) $S = 36$ см^2; 2) $S = 144$ мм^2. Измерьте диагональ построенного квадрата с точностью до 1 мм. Каково ее точное значение? (Для нахождения точного значения диагонали квадрата воспользуйтесь теоремой Пифагора: если a и b – катеты прямоугольного треугольника, а c – его гипотенуза, то выполняется равенство $c^2 = a^2 + b^2$.)

Упражнения

А

1.1. Покажите, что:

1) $\sqrt{64} = 8$; 2) $\sqrt{225} = 15$; 3) $\sqrt{0,09} = 0,3$; 4) $\sqrt{1,21} = 1,1$.

3) ▲ $(0,3)^2 = 0,09 \Rightarrow \sqrt{0,09} = 0,3$ ■

1.2. Докажите, что число: 1) 7 есть квадратный корень из числа 49; 2) -6 есть квадратный корень из числа 36; 3) 0,1 есть квадратный корень из числа 0,01; 4) $1\frac{1}{4}$ есть квадратный корень из числа $1\frac{9}{16}$.

1.3. Найдите квадраты чисел:

$\sqrt{16}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{81}$; $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{1,2}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

▲ $\left(-\sqrt{1,2}\right)^2 = \left(\sqrt{1,2}\right)^2 = 1,2$ ■

1.4. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{64}$; 2) $\sqrt{25}$; 3) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{100}$; 5) $\sqrt{1600}$; 6) $\sqrt{400}$;

7) $\sqrt{10000}$; 8) $\sqrt{0,09}$; 9) $\sqrt{0,49}$; 10) $\sqrt{2,25}$; 11) $\sqrt{\frac{9}{4}}$; 12) $\sqrt{\frac{64}{25}}$.

5) ▲ $\sqrt{1600} = \sqrt{(40)^2} = 40$ ■

1.5. Вычислите:

1) $\sqrt{900}$; 2) $\sqrt{2500}$; 3) $\sqrt{0,01}$; 4) $\sqrt{6,25}$; 5) $\sqrt{1,44}$;

6) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{\frac{25}{4}}$; 8) $\sqrt{\frac{81}{49}}$; 9) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 10) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

9) ▲ $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$ ■

1.6. Заполните пустые клетки в таблице:

a	4	49		0,25	3600			5	99
$\sqrt{a}$			11			$\sqrt{2}$	$\sqrt{0,4}$		

1.7. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{64}$; 2) $-\sqrt{64}$; 3) $\sqrt{-64}$; 4) $-\sqrt{1,2}$; 5) $\sqrt{-1,2}$;

6) $\sqrt{3}$; 7) $\sqrt{4,9}$; 8) $\sqrt{-0,04}$; 9) $-\sqrt{0,2}$; 10) $\sqrt{-\frac{9}{4}}$?

1.8. Вычислите:

1) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{9}$;   2) $5\cdot\sqrt{49}$;   3) $\sqrt{0,04}+\sqrt{0,16}$;

4) $\sqrt{25}:\sqrt{100}$;   5) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{81}$;   6) $\sqrt{\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{25}{4}}$.

1.9. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{a+b}$ при $a=28,\ b=-12$;   2) $\sqrt{x-y}$ при $x=55,\ y=-9$;

3) $x+\sqrt{x}$ при $x=0,09$;   4) $\sqrt{2a-5}$ при $a=15$.

1) ▲ $\sqrt{a+b}=\sqrt{28-12}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$ ■

1.10. Решите уравнение:

1) $x^2=64$;   2) $x^2=25$;   3) $x^2-0,09=0$;   4) $x^2=3$.

1) ▲ $8^2=64$; $(-8)^2=64 \Rightarrow x=\pm 8$ ■

B

1.11. Квадратным корнем из какого числа является число:

1) 2; 2) 7; 3) -5; 4) 1,2; 5) $1\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{4}{7}$; 7) $-0,2$; 8) $\sqrt{3}$;

9) $-\sqrt{1,5}$;   10) $\sqrt{2\frac{2}{5}}$?

1.12. Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$;   2) $\left(4\sqrt{3}\right)^2$;   3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$;

4) $\left(-\sqrt{13}\right)^2$;   5) $\left(-\sqrt{13}\right)\cdot\sqrt{13}$;   6) $3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;   8) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right)^2$;   9) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\right)^2$.

5) ▲ $\left(-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}\right)=-\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=-\left(\sqrt{13}\right)^2=-13$ ■

1.13. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x}$;   2) $\sqrt{x^2}$;   3) $\sqrt{-x}$;   4) $\sqrt{-3x}$;

5) $\sqrt{25x}$;   6) $\sqrt{0,01x}$;   7) $\sqrt{-\frac{7x}{5}}$;   8) $\sqrt{-81x^2}$?

3) ▲ $-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0 \Rightarrow x \in (-\infty;\ 0]$ ■

1.14. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 25$; 3) $4\sqrt{y} = 12$;
4) $7\sqrt{y} = 0$; 5) $7\sqrt{x} = 2$; 6) $11\sqrt{x} = 10$.

2) ▲ $x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = 25^2 = 625$. Ответ: $x = 625$. ■

1.15. Запишите число в виде квадрата числа:

1) 16; 2) 1,21; 3) 625; 4) 0,16; 5) 7; 6) 2,5; 7) $\frac{49}{25}$; 8) $\frac{1}{3}$.

1) ▲ $16 = 4^2$ ■

1.16. Решите уравнение:

1) $x^2 - 7 = 0$; 2) $-y^2 + 6 = 0$;
3) $3x^2 - 7 = 0$; 4) $-4x^2 + 19 = 0$;
5) $-0{,}3y^2 + 0{,}39 = 0$; 6) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4} = 0$.

6) ▲ $x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ■

1.17. Вычислите:

1) $\sqrt{(7{,}2)^2}$; 2) $\sqrt{(-0{,}5)^2}$; 3) $\sqrt{41^2}$;
4) $\sqrt{(-22)^2}$; 5) $\sqrt{|-1{,}9|^2}$; 6) $\sqrt{|-7|^2}$.

2) ▲ $\sqrt{(-0{,}5)^2} = |-0{,}5| = 0{,}5$ ■

1.18. Запишите выражение без знака радикала при условии, что переменные принимают только положительные значения:

1) $\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{4x^2}$; 3) $\sqrt{0{,}01y^2}$; 4) $\sqrt{\frac{9b^2}{4}}$.

2) ▲ $\sqrt{4x^2} = \sqrt{(2x)^2} = |2x| = 2x$ ■

1.19. Замените выражение тождественно равным ему выражением, не содержащим знака корня:

1) $\sqrt{(x-2)^2}$; 2) $\sqrt{(y+3)^2}$;

3) $\sqrt{(a-1)^2}$, $a<1$; 4) $\sqrt{(5-x)^2}$, $x \geqslant 5$;

5) $\sqrt{4m^2+4m+1}$; 6) $\sqrt{(b+6)^2}$, $b<-6$.

2) ▲ $\sqrt{(y+3)^2}=|y+3|$ ■

C

1.20. Сократите дробь:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$; 2) $-\dfrac{7}{2\sqrt{7}}$; 3) $\dfrac{2x}{\sqrt{x}}$; 4) $-\dfrac{a}{2\sqrt{a}}$;

5) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{0,2}+0,2}{2\sqrt{0,2}}$; 7) $\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 8) $\dfrac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

5) ▲ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ ■

1.21. Объясните, почему уравнение не имеет корней:

1) $\sqrt{x}=-4$; 2) $2\sqrt{y}+5=0$;

3) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$; 4) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}=5$.

1.22. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{x-5}$; 2) $\sqrt{x+5}$; 3) $\sqrt{2x-\dfrac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$.

1.23. Разложите на множители:

1) a^2-3; 2) b^2-2c^2; 3) $-12x^2+13$; 4) $\dfrac{m^2}{5}-\dfrac{n^2}{14}$.

1) ▲ $a^2-3=a^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(a-\sqrt{3}\right)\left(a+\sqrt{3}\right)$ ■

1.24. Покажите, что значение выражения является целым числом:

1) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$; 2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$;

3) $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)$; 4) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{3}+2\sqrt{10}\right)$.

1.25. При каких значениях переменной выполняется равенство:

1) $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$; 2) $\sqrt{a^2-6a+9}=3-a$;

3) $\sqrt{y^4+4y^2+4}=y^2+2$?

2) ▲ $\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=3-a\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant 3$ ■

1.26. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-3}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{2x-5}{\sqrt{2x}+\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Упражнения для повторения

1.27. Упростите выражение:

1) $(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-1\right)$; 2) $\left(m+1+\dfrac{1}{m-1}\right):\left(m-\dfrac{m^2}{m-1}\right)$.

1.28. Запишите без знака модуля:

1) $|a^2|$; 2) $|x|^2$; 3) $|y^3|$, $y>0$; 4) $|m|^3$, $m<0$.

1.29. За 2 кг риса и 3 кг муки заплатили 980 тенге. Известно, что один килограмм риса на 40 тенге дороже одного килограмма муки. Найдите цену килограмма риса и килограмма муки.

1.2. ПОНЯТИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО ЧИСЛА

Вычисление приближенного значения квадратного корня из числа

На практике приближенное значение квадратного корня из числа вычисляют с помощью калькулятора (компьютера). Для этого на калькуляторе нужно набрать данное число и нажать кнопку со знаком $\boxed{\sqrt{\ }}$. Например:

$$\boxed{1444}\rightarrow\boxed{\sqrt{\ }}\rightarrow\boxed{38}\quad\Rightarrow\boxed{\sqrt{1444}=38}$$

Не для всех чисел квадратные корни из числа равны целому числу. Например, с помощью калькулятора находим, что

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237...$; $\qquad \sqrt{3} = 1{,}730508075...$;

$\sqrt{5} = 2{,}2360679774...$.

Здесь многоточие показывает, что десятичная дробь бесконечно продолжается. В зависимости от требуемой точности берут приближенные значения указанных чисел. Например, для числа $\sqrt{2}$ можем записать следующую систему двойных неравенств:

$$
\begin{gathered}
1 < \sqrt{2} < 2 \\
1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\
1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\
1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \\
1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 \\
1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422
\end{gathered}
$$

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421;... составляют последовательность приближенных значений числа $\sqrt{2}$ **по недостатку.**

Числа 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422;... составляют последовательность приближенных значений числа $\sqrt{2}$ **по избытку.**

Иррациональные числа. Множество действительных чисел

Пример 1. Пусть x – сторона квадрата, площадь которого равна 2. Покажем, что x не является рациональным числом (рис. 1.2).

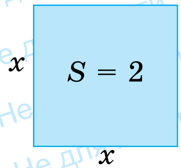


Рис. 1.2

▲ По условию задачи $x^2 = 2$. Это математическая модель задачи. Покажем, что уравнение не имеет рациональных корней.

Предположим, что это уравнение имеет рациональный корень вида $x = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N$ и число $\frac{m}{n}$ является несократимой дробью (любое рациональное число можно представить в виде несократимой дроби). Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m$ – четное число, т.е. $m = 2k$, $k \in N \Rightarrow$ $\Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n$ – также четное число. Итак, m и n являются четными числами. Это противоречит тому, что $\frac{m}{n}$ является несократимой дробью, т. е. x не является рациональным числом.■

Любое рациональное число записывается в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

x – нерациональное число, т. е. записывается в виде бесконечной непериодической дроби.

Определение. Бесконечная непериодическая десятичная дробь называется **иррациональным числом.**

Не все иррациональные числа записываются со знаком квадратного корня. Например, хорошо известное вам число $\pi = 3{,}14159265\ldots$ является иррациональным числом. Также, число $0{,}10110111011110\ldots$ является иррациональным числом, т. к. оно представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

На латыни приставку «ir» используют для выражения противоположных по смыслу понятий. Поэтому слово «иррациональное» по смыслу означает слово «нерациональное».

Рациональные и иррациональные числа вместе называются действительными числами. **Множество** всех **действительных чисел** обозначают буквой R.

Структура множества R – **множества действительных чисел.**

$N = \{1;\ 2;\ 3;\ldots\}$ – множество натуральных чисел.

$Z = \{\ldots,\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ldots\}$ – множество целых чисел.

$Q = \left\{\dfrac{n}{m};\ m \in N,\ n \in Z\right\}$ – множество рациональных чисел.

С помощью знака $\boxed{\subset}$ включение одного множества в другое запишем так: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

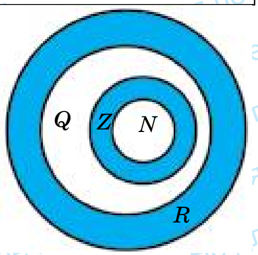


Рис. 1.3

На рис. 1.3 эти множества изображены с помощью кругов Эйлера–Венна. Таким образом, множество действительных чисел является объединением множеств рациональных и иррациональных чисел.

К действительным числам применяются все известные нам арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление на числа, отличные от нуля). При решении задач обычно берут приближенные значения действительных чисел с необходимой точностью и к ним применяют действия по правилам, применяемым к конечным десятичным дробям.

Пример 2. Найти приближенное значение суммы $\pi + \sqrt{3}$.

▲ Так как $\pi \approx 3{,}14$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ с точностью до 0,01, то

$\pi + \sqrt{3} \approx 3{,}14 + 1{,}73 = 4{,}87$. ■

Для сравнения действительных чисел также применяют правила сравнения конечных десятичных дробей.

Пример 3. Сравнить числа π и 3,(14).

▲ $\pi = 3{,}14159\ldots > 3{,}1415 > 3{,}141414\ldots = 3{,}(14)$. ■

Материалы из истории

С древних времен решение многих задач из повседневной жизни приводило к необходимости нахождения квадратного корня из числа. Например, определение стороны земельного участка квадратной формы с заданной площадью, задачи, сводимые к решению квадратных уравнений и т. д.

Так, например, еще во II веке до нашей эры древним китайцам было известно правило нахождения приближенных значений квадратных корней. А в IV–V веках нашей эры ученым Индии было известно, что положительное число имеет 2 квадратных корня (положительный и отрицательный) и отрицательное число не имеет квадратных корней.

По сохранившимся клинописям и папирусам можно судить о том, что около 3000 лет до нашей эры в Древнем Вавилоне пользовались формулой для вычисления приближенного значения квадратного корня из числа. Если перевести эту формулу на современный язык алгебры, то она выглядит так:

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}. \tag{1}$$

Например, найдем приближенное значение числа $\sqrt{19}$ с помощью формулы (1):

$$\sqrt{19} = \sqrt{16 + 3} \approx 4 + \frac{3}{2 \cdot 4} = 4{,}375.$$

Так как $(4{,}375)^2 = 19{,}140625$, то приближенное значение числа $\sqrt{19}$ найдено с точностью до 0,1. Очевидно, что эта точность зависит от выбора числа a. Если $a^2 = (4{,}2)^2 = 17{,}64$, то $b = 1{,}36$. Поэтому имеем:

$$\sqrt{19} = \sqrt{17{,}64 + 1{,}36} \approx 4{,}2 + \frac{1{,}36}{2 \cdot 4{,}2} = 4{,}3619047\ldots.$$

Здесь $(4{,}3619047)^2 = 19{,}026212\ldots$, т.е. точность приближения повысилась.

В эпоху Возрождения европейские математики начали обозначать квадратный корень латинским словом *radix* (корень), а позже – буквой *R*. А еще позднее квадратный корень начали обозначать знаком V и подкоренное выражение подчеркивали сверху. Современный знак квадратного корня $\sqrt{\ }$ впервые в своих трудах применил французский математик М. Ролль (1652–1719).

В целом понятие действительного числа возникло в процессе расширения понятия рационального числа. Необходимость расширения понятия рациональных чисел продиктована прежде всего нуждами приложения математики в повседневной жизни и внутреннего развития самой математики (например, нахождение квадратного корня из числа). В школе древнегреческого ученого Пифагора (VI век до н. э.) было доказано, что если в качестве единицы измерения брать сторону квадрата, то его диагональ не выражается рациональным числом. Такие отрезки (сторона квадрата и его диагональ) назывались несоизмеримыми отрезками. Итак, древнегреческие ученые, развивая теорию несоизмеримых отрезков, вплотную подошли к понятию действительного числа. Однако действительные числа как понятие впервые начал рассматривать в XVII веке в своих трудах И. Ньютон (1643–1727). А строгую математическую теорию действительных чисел в XIX веке предложили такие немецкие ученые, как К. Вейерштрасс (1815–1897), Р. Дедекинд (1831–1916) и Г. Кантор (1845–1918).

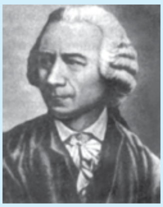
1. Какие числа называются иррациональными?
2. Какие числа называются десятичными приближениями иррационального числа по недостатку и по избытку?
3. Докажите, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.
4. Какие числа называются действительными?
5. Множество каких чисел входит во множество действительных чисел?
6. Как обозначаются множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел? Изобразите их с помощью кругов Эйлера–Венна.

Практическая работа

С помощью формулы (1) найдите приближенное значение числа: 1) $\sqrt{273}$; 2) $\sqrt{0,66}$. Оцените точность найденного приближенного значения с помощью калькулятора.

Подготовьте сведения

Леонард Эйлер — швейцарский математик. Многие годы был членом Петербургской академии наук. Известен как автор самого многочисленного по объему собрания математических трудов. По оценке ученых, полное собрание его научных трудов составило бы 60–80 объемных томов.



Леонард Эйлер
(1707–1783)

Исаак Ньютон – английский ученый, математик, механик, астроном и физик. Он является одним из основоположников математического анализа. Сформулировал основные законы классической механики и открыл закон всемирного тяготения.

Исаак Ньютон (1643–1727)

Упражнения

А

1.30. Найдите для следующих чисел десятичные приближенные значения с точностью до 0,1 и до 0,01 и по недостатку, и по избытку:

1) 0,2664; 2) –1,2731; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $-\frac{2}{7}$.

1.31. Покажите, что числа 2,6 и 2,7 являются приближенными значениями $\sqrt{7}$ с точностью до 0,1 по недостатку и по избытку соответственно.

1.32. Покажите, что приближенное значение, полученное из равенства $\sqrt{5}\approx 2,23$, выполняется с точностью до 0,01.

▲ Т.к. $\sqrt{5}\approx 2,23606$ ..., то абсолютная погрешность удовлетворяет неравенству:

$\left|\sqrt{5}-2,23\right|=0,00606$ ... $< 0,01$, т. е. приближение $\sqrt{5}\approx 2,23$ верно с точностью до 0,01. ■

1.33. Запишите числа в виде десятичной дроби:

1) $\frac{31}{20}$; $\frac{7}{50}$; $\frac{17}{200}$; 2) $\frac{8}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{13}{50}$; 3) $\frac{3}{150}$; $\frac{21}{35}$; $\frac{13}{65}$.

1.34. Выполните указанные действия:

1) $(0,6\cdot 0,1-0,186:0,1)+1,575:1,5$;

2) $(0,137:0,01-14,2)\cdot 2,44+1,23$;

3) $0,025\cdot(134,7075+3,75:2,5-2,27)$;

4) $3,85\cdot 5\frac{1}{7}+69,25:27,7-14\frac{3}{20}$.

2) ▲ $(0,137 : 0,01 - 14,2)\cdot 2,44 + 1,23 = (13,7-14,2)\cdot 2,44 + 1,23 = -0,5\cdot 2,44 + 1,23 = -1,22 + 1,23 = 0,01$ ■

1.35. Вычислите:

1) $\left(42\dfrac{5}{12}-21\dfrac{11}{18}\right)-\left(25-4\dfrac{1}{9}\right)$; 2) $\left(2\dfrac{1}{2}:3\dfrac{2}{3}\right):\left(7\dfrac{1}{2}:7\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(5\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{21}\right)$;

3) $1,5\cdot\left(\dfrac{3}{50}+0,2652:0,13-1\dfrac{17}{30}\right)+1\dfrac{13}{15}$; 4) $\dfrac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}-5,7\cdot\dfrac{2}{19}$.

1.36. Запишите числа в виде периодической десятичной дроби:

1) $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{7}$; $-\dfrac{20}{9}$; $\dfrac{5}{6}$; 2) $-\dfrac{8}{15}$; $10,28$; -17; $\dfrac{3}{16}$;

3) $1\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{5}{16}$; $-1\dfrac{5}{8}$; $\dfrac{7}{30}$; 4) $1\dfrac{12}{25}$; $\dfrac{5}{16}$; $\dfrac{49}{80}$; $\dfrac{17}{30}$.

1.37. Запишите периодические дроби в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(3); 0,2(5); 7,(36); 2) 7,2(23); 4,2(25); 1,0(27);
3) 10,21(4); −2,1(12); 4) 0,(312); 0,0(2).

4) ▲ $0,(312)=\dfrac{312}{999}=\dfrac{104}{333}$; $0,0(2)=\dfrac{2}{90}=\dfrac{1}{45}$ ■

1.38. Вычислите с помощью калькулятора:

1) $\sqrt{2112}$; 2) $\sqrt{72234}$; 3) $\sqrt{134,7075}$; 4) $\sqrt{0,28452}$.

B

1.39. Найдите приближенное значение следующих чисел с точностью до 0,01 по недостатку:

1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{7}$; 2) $\dfrac{2}{5}+\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

4) ▲ $\left.\begin{array}{l}\sqrt{10}=3,1622\ldots>3,162\\ \sqrt{2}=1,4142\ldots<1,415\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{10}-\sqrt{2}>3,162-1,415=$
$=1,747>1,74$. Ответ: 1,74. ■

1.40. Может ли сумма рационального и иррационального чисел быть рациональным числом? Обоснуйте ответ.

1.41. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом? Обоснуйте ответ.

1.42. Докажите иррациональность следующих чисел:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

▲ 4) Предположим, что $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ – рациональное число: $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N \Rightarrow 2+\sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2} - 2$ – рациональное число. Это противоречит тому, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число, т. е. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ является иррациональным числом. ■

1.43. В десятичной записи числа a с определенного места после запятой цифры повторяются периодически. Каким может быть число a: рациональным или иррациональным?

1.44. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное (при $b \neq 0$) рациональных чисел a и b являются рациональными числами.

1.45. Вычислите:

1) $0,(3) + \frac{1}{3}$; 2) $(2,(1) + 3,(12)):0,5$;

3) $1,(7) + 8,(2)$; 4) $5,1(7) + 0,(15) - 1,3(21)$.

2) ▲ $(2,(1) + 3,(12)) : 0,5 = (2,(11) + 3,(12)) \cdot 2 = 5,(23) \cdot 2 = 10,(46)$ ■

1.46. Сравните числа:

1) $\frac{3}{8}$ и $0,375$; 2) $-1,174$ и $-1\frac{7}{40}$;

3) $-1\frac{3}{4}$ и $-1,75$; 4) $0,437$ и $\frac{7}{15}$;

5) $0,1(3)$ и $0,132$; 6) $0,239$ и $0,23(8)$;

7) $0,(94)$ и $\frac{34}{37}$; 8) $\frac{241}{33}$ и $7,31(06)$.

1.47. Применяя калькулятор, вычислите приближенное значение выражения с точностью до 0,001:

1) $\sqrt{2,1} + \sqrt{3,51}$; 2) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{3,14^2 + 2,1\sqrt{2}}$; 4) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$;

5) $\sqrt{2,1 + \sqrt{3,1 + \sqrt{4,1}}}$; 6) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

C

1.48. Найдите условие, при котором: 1) сумма; 2) разность; 3) произведение; 4) частное двух несократимых дробей является целым числом.

1.49. Найдите условие, при котором: 1) сумма; 2) разность двух несократимых дробей равна их произведению.

1.50. Применяя формулу (2), найдите приближенные значения чисел: 1) $\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{125}$; 3) $\sqrt{5,7}$; 4 $\sqrt{521}$ с точностью до 0,1 и до 0,01.

1.51*. Покажите, что если x_1 является приближенным значением числа $\sqrt{a}$ $(a>0)$ по недостатку, то число $\frac{a}{x_1}$ является приближенным значением $\sqrt{a}$ по избытку.

▲ Если $\sqrt{a} > x_1$, то $\frac{a}{x_1} > \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. ■

1.52*. Покажите, что если x_1 является приближенным значением числа $\sqrt{a}$ $(a>0)$ по избытку, то число $\frac{a}{x_1}$ является приближенным значением $\sqrt{a}$ по недостатку.

1.53. Из упражнений **1.51*** и **1.52*** следует, что если x_1 является приближенным значением числа $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ по недостатку (по избытку), то число $\frac{a}{x_1}$ является приближенным значением $\sqrt{a}$ по избытку (по недостатку). Возьмем среднее арифметическое этих приближенных значений: $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$. Тогда x_2 является более точным приближенным значением числа $\sqrt{a}$ по сравнению с приближенными значениями x_1 и $\frac{a}{x_1}$. А в свою очередь одно из чисел x_2 и $\frac{a}{x_2}$ (следует из упражнений **1.50** и **1.51***) является приближенным значением $\sqrt{a}$ по недостатку, а другое – по избытку. Теперь и число $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right)$ также является более точным приближенным значением числа $\sqrt{a}$ по сравнению с числами x_2 и $\frac{a}{x_2}$. Продолжая этот процесс, мы получим следующую рекуррентную (от лат. *recurrens* – возвращающийся, возвратный) формулу приближенного значения числа $\sqrt{a}$:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right),\ n = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Например, $x_1 = 2$ является приближенным значением $\sqrt{5}$ по недостатку. Тогда по формуле (3) второе приближенное значение числа $\sqrt{5}$ имеет вид:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2,25.$$

Теперь определим следующие приближенные значения числа $\sqrt{5}$:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(2,25 + \frac{5}{2,25}\right) = \frac{161}{72} = 2,236(1) \approx 2,2361; \quad x_4 = \frac{1}{2}\left(2,2361 + \frac{5}{2,2361}\right) \approx 2,2361.$$

Итак, x_3 является приближенным значением (десятичным приближением) числа $\sqrt{5}$ с точностью до 0,0001.

С помощью формулы (3) найдите приближенные значения числа: 1) $\sqrt{24,24}$; 2) $\sqrt{3,81}$; 3) $\sqrt{516,3}$; 4) $\sqrt{0,721}$ с точностью до 0,001.

1.54. Напишите рациональные и иррациональные числа, расположенные между числами 5 и 5,01.

1.55. Приведите пример двух иррациональных чисел: 1) сумма; 2) произведение которых является рациональным числом.

Упражнения для повторения

1.56. Как можно отрезать от куска материи длиной 1 м: 1) половину; 2) четверть; 3) $\frac{1}{8}$ часть без применения измерительных приборов?

1.57. Докажите, что значение дроби:

1) $\frac{10^n + 2}{3}$; 2) $\frac{10^n + 8}{9}$; 3) $\frac{10^n + 5}{5}$; 4) $\frac{101 \cdot 10^{2n} + 9}{11}$

при любом натуральном n является целым числом.

1.58. Принадлежит ли точка: 1) $A(-0,3;\ 0,09)$;

2) $B\left(1\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{4}\right)$; 3) $C\left(-3\frac{1}{3};\ \frac{1}{9}\right)$ графику функции $y = x^2$?

1.59. Упростите выражение:

1) $\frac{xy^2 - xz^2}{2x + 8} \cdot \frac{3x + 12}{xy + xz}$; 2) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a - 1} : \frac{a^3 - b^3}{a^2 - 1}$.

1.3. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ И ТОЧКАМИ ПРЯМОЙ

Целая и дробная части числа

Каждое число лежит между двумя последовательными целыми числами, т.е. для любого действительного числа x найдется такое целое число $n \in Z$, что верно неравенство $n \leqslant x < n + 1$.

$$2 < \frac{8}{3} < 3; \quad 0 < \frac{79}{113} < 1; \quad -4 < -\frac{7}{2} < -3; \quad 1 < \sqrt{2} < 2; \quad -3 < 1 - \pi < -2; \quad 4 \leqslant 4 < 5.$$

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превышающее числа x. Целую часть обозначают так: $[x]$.

$$\boxed{\text{Итак, если } n \leqslant x < n + 1, \text{ то } [x] = n.}$$

$$\left[\frac{8}{3}\right] = 2; \quad \left[\frac{79}{113}\right] = 0; \quad \left[-\frac{7}{2}\right] = -4; \quad \left[\sqrt{2}\right] = 1; \quad [1 - \pi] = -3; \quad [4] = 4.$$

Разность числа x и его целой части называется **дробной частью** этого числа и обозначается так: $\{x\}$.

$$\boxed{\{x\} = x - [x], \quad 0 \leqslant \{x\} < 1.}$$

$$\left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}; \quad \left\{\frac{79}{113}\right\} = \frac{79}{113} - 0 = \frac{79}{113}; \quad \left\{-\frac{7}{2}\right\} = -\frac{7}{2} - (-4) = \frac{1}{2}; \quad \left\{\sqrt{2}\right\} = \sqrt{2} - 1;$$

$$\{1 - \pi\} = 1 - \pi + 3 = 4 - \pi; \quad \{4\} = 4 - 4 = 0.$$

Соответствие между действительными числами и точками прямой

В 6 классе вы рассматривали числовую ось и научились определять на ней координаты точек.

На рис. 1.4 изображены точки $N(-2)$ и $M(4)$.

Вы с этим знакомы

Рис. 1.4

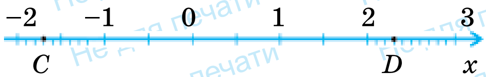


Рис. 1.5

На рис. 1.5 показан способ нахождения точек $C(-1{,}7)$ и $D(2{,}3)$.

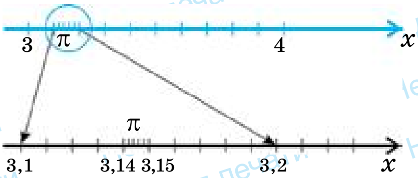


Рис. 1.6

На рис. 1.6 показан способ определения приблизительного места числа $\pi = 3{,}141592\ldots$. Также можно показать приблизительное место любого действительного числа на числовой оси.

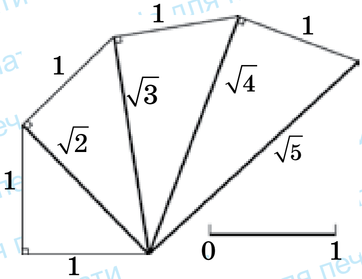


Рис. 1.7

В отдельных случаях на числовой оси удается указать точное место некоторых иррациональных чисел с помощью циркуля и линейки. Например, на рис. 1.7 показан способ построения отрезков длиной $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … и т.д.

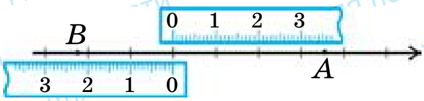


Рис. 1.8

Координаты любой точки числовой оси определяют с помощью измерения. Например, на рис. 1.8 показан способ определения координат точек A и B: $A(3{,}5)$ и $B(-2{,}3)$. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками числовой оси и действительными числами.

Если на числовой оси даны точки $A(a)$ и $B(b)$, то расстояние между этими точками определяется формулой

$$AB = |a - b| \tag{1}$$

Например, на рис. 1.8 $AB = |3{,}5 - (-2{,}3)| = |3{,}5 + 2{,}3| = 5{,}8$.

Некоторые числовые промежутки и их выражение с помощью неравенств

В 6 классе вы рассматривали множества и научились применять к ним различные действия. Кроме того, вы рассматривали и числовые множества (числовые промежутки), ознакомились с их обозначением, их записью с помощью неравенств и научились изображать их на числовой оси. Чтобы лучше вспомнить все это и вкратце повторить, мы рекомендуем воспользоваться следующей таблицей, так как этим материалом мы будем пользоваться и в следующих главах.

Неравенства	Числовые промежутки	Их изображение на числовой оси
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a;\ b]$ – замкнутый промежуток (отрезок)	
$a < x < b$	$(a;\ b)$ – открытый промежуток	
$a \leqslant x < b$	$[a;\ b)$ – полуоткрытые промежутки	
$a < x \leqslant b$	$(a;\ b]$	
$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty;\ +\infty)$ – числовая ось	
$a \leqslant x < +\infty$	$[a;\ +\infty)$ – лучи, открытые лучи	
$a < x < +\infty$	$(a;\ +\infty)$	
$-\infty < x \leqslant a$	$(-\infty;\ a]$	
$-\infty < x < a$	$(-\infty;\ a)$	

1. Дайте определение целой части числа.
2. Дайте определение дробной части числа.
3. Что представляет собой числовая ось?
4. Как определяется точка на числовой оси, соответствующая данному числу?
5. Как найти число, соответствующее заданной точке на числовой оси?
6. Что такое координаты точки на числовой оси и как их записывают?
7. Какие числовые промежутки вы знаете? Запишите их с помощью неравенств.

Практическая работа

С помощью циркуля и линейки на числовой оси найдите точное место расположения точек: $A(\sqrt{5})$, $B(-\sqrt{13})$ и $C(\sqrt{61})$.

Упражнение

A

1.60. Напишите целую и дробную части числа:

1) $2\frac{7}{17}$; 2) $-3\frac{4}{5}$; 3) 5;

4) 122,31; 5) –17,32; 6) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$.

5) ▲ $[-17{,}32] = -18$; $\{-17{,}32\} = -17{,}32 + 18 = 0{,}68$ ■

1.61. По заданной масштабной единице на числовой оси укажите точки с координатами $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \sqrt{3}$; $-1{,}6$; $0{,}7$.

1.62. Найдите расстояние между точками A и B:

1) $A(1{,}5)$; $B(-2)$; 2) $A(-10{,}3)$; $B(6{,}2)$;

3) $A(-3{,}6)$; $B(0)$; 4) $A(-5{,}7)$; $B(-1)$.

1.63. Запишите в виде уравнения или неравенства условия, которым удовлетворяют координаты точки $A(x)$, если:

1) $AB = 5$; $B(5)$; 2) $AB < 3{,}5$; $B(-1)$;

3) $AB \leqslant 0{,}2$; $B(-4{,}5)$; 4) $AB < \frac{1}{48}$; $B(-12)$.

3) ▲ Если $A(x)$, то $AB = |x + 4{,}5| \Rightarrow$
$\Rightarrow |x + 4{,}5| \leqslant 0{,}2 \Rightarrow -0{,}2 \leqslant x + 4{,}5 \leqslant 0{,}2 \Rightarrow -4{,}7 \leqslant x \leqslant -4{,}3$. ■

1.64. Отметьте на числовой оси точки $A(-7)$, $B(5)$, $C(2)$ и найдите длины отрезков AB, AC и BC.

1.65. Запишите в виде промежутка множество точек, заданное неравенством: 1) $x>5$; 2) $x<3$; 3) $-3<x<7$;

4) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; 5) $x \geqslant -2$; 6) $-\infty < x \leqslant 11$; 7) $-5 < x \leqslant 0$.

1.66. Изобразите промежутки на числовой оси и запишите их с помощью неравенств: 1) $[2;+\infty)$; 2) $[-5;\ 3]$; 3) $(-2;\ 0)$; 4) $(-\infty;-1)$; 5) $(-\infty;5]$; 6) $(-3;+\infty)$; 7) $[2;\ 4)$; 8) $(-2;\ 1]$.

1.67. Найдите наибольшее натуральное число, не превышающее число: 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{69}$; 4) $\sqrt{111}$; 5) $\sqrt{250}$; 6) $\sqrt{1221}$.

4) ▲ $\sqrt{111} > \sqrt{100} = 10$; $\sqrt{111} < \sqrt{121} = 11 \Rightarrow 10 < \sqrt{111} < 11$.

Ответ: 10. ■

1.68. Найдите наименьшее натуральное число превышающее число: 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{23}$; 3) $\sqrt{67}$; 4) $\sqrt{113}$; 5) $\sqrt{250}$; 6) $\sqrt{2112}$.

B

1.69. Разложите числа на сумму целой и дробной частей:

$$\frac{3}{4},\ \frac{21}{19},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{81}{20},\ \frac{1}{3}+\frac{5}{2},\ \frac{3}{5}-\frac{7}{3},\ -\frac{2}{5}+\frac{20}{27},\ -\frac{5}{6}-\frac{215}{183}.$$

1.70. Какое из чисел больше:

1) 3 или $\sqrt{8,5}$; 2) $3\sqrt{2}$ или $\sqrt{17}$;

3) $5\sqrt{3}$ или $6\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ или 2?

1.71. Найдите целую часть числа:

1) $\sqrt{14}$; 2) $-\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{238}$; 4) $-\sqrt{105}$.

2) ▲ $-\sqrt{32} > -\sqrt{36} = -6$;

$-\sqrt{32} < -\sqrt{25} = -5 \Rightarrow -6 < -\sqrt{32} < -5 \Rightarrow [-\sqrt{32}] = -6$ ■

1.72. Какое из чисел является рациональным, а какое – иррациональным:

1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{1,44}$; 3) $\sqrt{18}$; 4) $-\sqrt{7}$; 5) 0,6161...; 6) −2,3(74);

7) 0,202002000...; 8) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$?

1.73. Известно, что числа a и b $(b \neq 0)$ являются рациональными числами. Покажите, что число $\frac{a}{b}$ также является рациональным числом.

1.74. Найдите расстояние между точками с координатами:

1) $\sqrt{2}$ и $-\frac{2}{3}$; 2) 0,5 и $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ с точностью до 0,01.

1.75. Какие из чисел расположены дальше от 0:

1) 5,2397 и 4,4996; 2) −15,001 и −15,100;

3) −0,3567(8) и 0,3559; 4) 2,103 и −2,093?

1.76. Найдите пересечение (множество общих точек указанных промежутков) множеств: 1) $[5;+\infty)$ и $(7;+\infty)$; 2) $[-3;5]$ и $(-\infty;0)$; 3) $(-\infty;4)$ и $[0;+\infty)$; 4) $(-\infty;10)$ и $(0;5)$; 5) $(-\infty;5)$ и $[-1;3]$; 6) $(-4;0)$ и $(3;4)$.

2) ▲ Из рис. 1.9 видно, что $[-3;5] \cap (-\infty;0) = [-3;0)$. ■

Рис. 1.9

1.77. Найдите объединение (множество точек, принадлежащих хотя бы одному из указанных промежутков) множеств:

1) $[2;4]$ и $(-7;3)$; 2) $(-2;0)$ и $[0;+\infty)$; 3) $(-1;5)$ и $(0;3)$;

4) $(-\infty;15]$ и $[2;4]$; 5) $(-\infty;4]$ и $[0;+\infty)$; 6) $(-3;0]$ и $[5;+\infty)$.

1.78. Найдите два смежных натуральных числа так, чтобы между ними лежало число:

1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{67}$; 4) $\sqrt{123}$; 5) $\sqrt{222}$; 6) $\sqrt{720}$.

C

1.79*. На рисунке 1.7 указан способ построения отрезков длиной, равной $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$. Можно ли более простым способом построить отрезок длиной, равной: 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{101}$; 3) $\sqrt{85}$?

1.80*. Как можно построить с помощью циркуля и линейки точку с координатой, равной $\frac{1}{a}$, если указана точка, координата которой равна a?

1.81*. На числовой оси укажите точку с координатой:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

1.82. Запишите неравенство: 1) $|x| < 5$; 2) $|x| \geqslant 2$; 3) $|x-3| \leqslant 3$; 4) $|x + 2| > 4$ с помощью числовых промежутков и изобразите их на числовой оси.

1.83. Укажите решения неравенств с помощью числовых промежутков: 1) $(x-1)(x+2) < 0$; 2) $(x-2)(x-5) \geqslant 0$; 3) $(x-3)^2 \leqslant 9$; 4) $(x+1)^2 > 1$.

1.84. Покажите, что ни при каком натуральном n дроби $\dfrac{n-6}{15}$, $\dfrac{n-5}{24}$ одновременно не могут принимать целые значения.

1.85. Решите неравенство, ответ запишите в числовых промежутках:

1) $\sqrt{(x-3)^2} \leqslant 2$; 2) $\sqrt{(x+3)^2} \leqslant 2$;

3) $\sqrt{(5-x)^2} < 3$; 4) $\sqrt{(2x+3)^2} < 1$.

Упражнения для повторения

1.86. Сколько минут содержится: 1) в половине; 2) в четверти; 3) в одной трети; 4) в двадцатой части одного часа?

1.87. Из 3 кг муки выпекают 5 одинаковых буханок хлеба. Сколько килограммов муки расходуется для выпечки 1 буханки хлеба?

1.88. Найдите наибольшее и наименьшее из чисел:

1) $\dfrac{5}{6}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{10}{14}, \dfrac{7}{8}$; 2) $\dfrac{217}{300}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{47}{60}, \dfrac{17}{20}$.

1.89. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 5$; 2) $\sqrt{x-1} = 3$;

3) $\sqrt{3x+2} = 6$; 4) $\sqrt{7x-8} = 12$.

1.90. При каких значениях x значение функции, заданной равенством $y = \dfrac{x}{2} + 2$, принадлежит промежутку $[-2; 2]$?

1.4. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Свойства квадратного корня

№	Формулировка свойств	Доказательство
1	Область определения выражения $\sqrt{a}$: $a \geqslant 0$, т.е. множество неотрицательных действительных чисел;	Справедливость свойств 1 – 4 было показано в п. 1.1.
2	$\sqrt{a} \geqslant 0$, т.е. значение арифметического квадратного корня неотрицательно;	
3	$\forall\ a \geqslant 0 \Rightarrow$ уравнение $x^2 = a$ имеет два корня: $x = \pm\sqrt{a}$;	
4	$\forall\ a \Rightarrow \sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$;	
5	$\forall\ a \geqslant 0, b \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, т.е. квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению квадратных корней из этих множителей;	▲ $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = a \cdot b$; $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 =$ $= a \cdot b \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ■
6	$\forall\ a \geqslant 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, т.е. квадратный корень из частного двух чисел равен частному квадратных корней из этих чисел;	▲ $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$; $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ■
7	$\forall\ a \geqslant 0, n \in N \Rightarrow \sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$, т.е. квадратный корень из степени a^n равен n-й степени квадратного корня.	▲ $\left(\sqrt{a^n}\right)^2 = a^n$; $\left(\left(\sqrt{a}\right)^n\right)^2 = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right)^n = a^n \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$ ■
Следствие	Если n – четное число $\Rightarrow \sqrt{a^n} = \lvert a \rvert^{\frac{n}{2}}$, $a \in R$.	▲ $n = 2k \Rightarrow \dfrac{n}{2} = k \in N$. $\left(\lvert a \rvert^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \left(\lvert a \rvert^k\right)^2 = \lvert a \rvert^{2k} = a^{2k} =$ $= a^n \Rightarrow \sqrt{a^n} = \lvert a \rvert^{\frac{n}{2}}$ ■

Пример 1. $\sqrt{9\cdot 25\cdot 36}=\sqrt{9}\sqrt{25}\sqrt{36}=3\cdot 5\cdot 6=90.$

Пример 2. $\sqrt{\dfrac{121}{324}}=\dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{324}}=\dfrac{11}{18}.$

Пример 3. $\sqrt{7^6}=7^{\frac{6}{2}}=7^3=343.$

Пример 4. Упростим выражение $\sqrt{a^{10}b^6}$ $(a>0, b<0)$.

$\sqrt{a^{10}b^6}=\sqrt{a^{10}}\sqrt{b^6}=|a|^5|b|^3=a^5(-b)^3=-a^5b^3.$

Пример 5. Сравним числа $\sqrt{288}$ и $13\sqrt{2}$.

1-й способ. (Вынесение множителя из-под знака корня.)

$\sqrt{288}=\sqrt{144\cdot 2}=\sqrt{144}\sqrt{2}=12\sqrt{2};\ \ 12\sqrt{2}<13\sqrt{2}.$

2-й способ. (Внесение множителя под знак корня.)

$13\sqrt{2}=\sqrt{169}\sqrt{2}=\sqrt{169\cdot 2}=\sqrt{338}>\sqrt{288}.$

Преобразование выражений, содержащих знак квадратного корня

Рассмотрим несколько примеров на преобразование выражений, содержащих знак квадратного корня.

Пример 6. Упростим выражение $\sqrt{15}-\sqrt{60}+3\sqrt{135}$.

▲ Сначала упростим 2 и 3-е слагаемые:

$\sqrt{60}=\sqrt{4\cdot 15}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{15}=2\sqrt{15};$

$3\sqrt{135}=3\cdot\sqrt{9\cdot 15}=3\cdot 3\cdot\sqrt{15}=9\sqrt{15}.$

Тогда $\sqrt{15}-\sqrt{60}+3\sqrt{135}=\sqrt{15}-2\sqrt{15}+9\sqrt{15}=8\cdot\sqrt{15}.$ ■

Пример 7. Преобразуем дробь: 1) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ так, чтобы ее знаменатель не содержал знака квадратного корня. Это действие называется **избавлением от иррациональности в знаменателе дроби.**

▲ 1) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{6}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$; 2) И знаменатель, и числитель данной дроби умножим на сопряженное выражение знаменателя, т.е. на выражение $\sqrt{5}+\sqrt{3}$. Тогда получим

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3} \ ■$$

Пример 8. Сократим дробь $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}$.

▲ Учитывая, что

$$a^2-5=a^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right), \text{ получим}$$

$$\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}=\frac{\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right)}{a-\sqrt{5}}=a+\sqrt{5}. \ ■$$

Пример 9. Полагая, что $a>3$, упростим выражение

$$\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}.$$

▲ Учитывая, что

$$\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=a-3, \text{ получим}$$

$$\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}=\sqrt{a^2+a+4+a-3}=\sqrt{a^2+2a+1}=$$

$$=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=a+1. \ ■$$

1. Какие свойства квадратных корней вы знаете?
2. Сформулируйте свойства квадратного корня 5) – 7) и докажите их.
3. Как вы понимаете смысл выражения «избавление от иррациональности в знаменателе дроби»?

Практическая работа

Измерьте с точностью до 0,1 см длину, ширину и диагональ:
1) поверхности парты, за которой вы сидите; 2) обложки учебника «Алгебра». В курсе геометрии доказывается равенство $d^2=a^2+b^2$, где a и b – стороны прямоугольника, d – его диагональ. Это равенство является математической записью теоремы Пифагора.
Сравните полученные результаты измерения и вычисления. Какое из найденных приближенных значений диагонали точнее оценивает ее значение? Обоснуйте ответ.

Упражнения

А

1.91. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{121\cdot 64}$; 2) $\sqrt{0,36\cdot 49}$; 3) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$;

4) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; 5) $\sqrt{0,04\cdot 81\cdot 25}$; 6) $\sqrt{0,09\cdot 16\cdot 0,04}$;

7) $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{25}}$; 8) $\sqrt{\frac{121}{144}\cdot 2\frac{1}{4}}$.

1.92. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{810\cdot 40}$; 2) $\sqrt{75\cdot 12}$; 3) $\sqrt{72\cdot 32}$; 4) $\sqrt{45\cdot 80}$;

5) $\sqrt{2,5\cdot 14,4}$; 6) $\sqrt{4,9\cdot 360}$; 7) $\sqrt{90\cdot 6,4}$; 8) $\sqrt{160\cdot 6,4}$.

5) ▲ $\sqrt{2,5\cdot 14,4}=\sqrt{25\cdot 1,44}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{1,44}=5\cdot 1,2=6$ ■

1.93. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{13^2-12^2}$; 2) $\sqrt{21,8^2-18,2^2}$; 3) $\sqrt{313^2-312^2}$;

4) $\sqrt{17^2-64}$; 5) $\sqrt{45,8^2-44,2^2}$; 6) $\sqrt{117^2-108^2}$;

7) $\sqrt{6,8^2-3,2^2}$; 8) $\sqrt{\left(2\frac{3}{5}\right)^2-\left(2\frac{2}{5}\right)^2}$.

1.94. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{2}\sqrt{8}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; 3) $\sqrt{27}\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$;

5) $\sqrt{28}\sqrt{7}$; 6) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; 7) $\sqrt{13}\sqrt{52}$; 8) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$.

1.95. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{27}$; 2) $\sqrt{98}$; 3) $\sqrt{80}$; 4) $\sqrt{160}$;

5) $\sqrt{432}$; 6) $\sqrt{675}$; 7) $3\sqrt{12}$; 8) $2\sqrt{18}$;

9) $4\sqrt{24}$; 10) $7\sqrt{75}$; 11) $\frac{3}{2}\sqrt{200}$; 12) $0,2\sqrt{300}$.

1.96. Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $3\sqrt{5}$; 4) $4\sqrt{7}$;

5) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; 6) $5\sqrt{92}$; 7) $\frac{2}{3}\sqrt{18}$; 8) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{32}{3}}$;

9) $5\sqrt{\frac{13}{25}}$; 10) $0{,}5\sqrt{60}$; 11) $0{,}3\sqrt{200}$; 12) $10\cdot\sqrt{0{,}07}$.

1.97. Выполните указанные действия:

1) $6\sqrt{2}+5\sqrt{18}$; 2) $5\sqrt{75}-2\sqrt{27}$;
3) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$; 4) $3\sqrt{20}+5\sqrt{45}-2\sqrt{80}$;
5) $2\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{12}$; 6) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$.

3) ▲ $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}=\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 25}-\sqrt{2\cdot 9}=$
$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ ■

1.98. Сравните числа:

1) $2\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{27}$ и $4\sqrt{3}$;
3) $5\sqrt{7}$ и $\sqrt{63}$; 4) $7\sqrt{2}$ и $\sqrt{72}$.

2) ▲ *1-й способ.* $\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=3\sqrt{3}<4\sqrt{3}$;
2-й способ. $4\sqrt{3}=\sqrt{16}\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}>\sqrt{27}$. ■

1.99. Упростите выражения, считая, что буквы принимают только положительные значения:

1) $\sqrt{16x^2}$; 2) $\sqrt{0{,}25a^2b^4}$; 3) $\sqrt{1{,}44a^2x^6}$;
4) $\sqrt{\frac{1}{9}m^2n^2}$; 5) $\sqrt{\frac{9x^2y^4}{16p^2q^2}}$; 6) $\sqrt{\frac{64a^4c^6}{81x^4y^2}}$.

1.100. Выполните указанные действия:

1) $(\sqrt{20}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{3})$;
3) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$; 4) $(\sqrt{8}-\sqrt{5})(\sqrt{8}+\sqrt{5})$.

B

1.101. Найдите все допустимые значения переменной:

1) $\sqrt{x^2+9}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{x}}$; 3) $\sqrt{|x|}$; 4) $\frac{4}{\sqrt{x}}$;
5) $\sqrt{|x|+1}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; 7) $\sqrt{(4-x)^2}$; 8) $\frac{5}{\sqrt{x}-1}$.

8) ▲ $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [0;\, 1) \cup (1;\, +\infty)$ ■

1.102. Вместо значка # поставьте нужный знак (<, =, >):

1) $\sqrt{7{,}5}\,\#\,\sqrt{7{,}6}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\,\#\,\sqrt{0{,}3}$; 3) $\sqrt{0{,}1}\,\#\,\sqrt{0{,}01}$;

4) $\sqrt{2{,}16}\,\#\,\sqrt{2\frac{1}{6}}$; 5) $\sqrt{7}\,\#\,2{,}6$; 6) $\sqrt{\frac{5}{6}}\,\#\,\sqrt{\frac{6}{11}}$;

7) $3{,}2\,\#\,\sqrt{9{,}8}$; 8) $\sqrt{\frac{1}{3}}\,\#\,\sqrt{0{,}(3)}$.

1.103. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}$; 2) $\sqrt{\frac{98}{176^2-112^2}}$;

3) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$; 4) $\sqrt{\frac{145{,}5^2-96{,}5^2}{193{,}5^2-31{,}5^2}}$.

1) ▲ $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165-124)(165+124)}{164}} =$

$= \sqrt{\frac{41\cdot 289}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$ ■

1.104. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{0{,}87\cdot 49+0{,}82\cdot 49}$; 2) $\sqrt{1{,}44\cdot 1{,}21-1{,}44\cdot 0{,}4}$.

1.105. При каких значениях переменной верно равенство:

1) $\sqrt{y^2}=-y$; 2) $\sqrt{y^4}=y^2$; 3) $\sqrt{x^6}=x^3$; 4) $\sqrt{c^{10}}=-c^5$?

1.106. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$.

2) ▲ $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \left|\sqrt{3}-5\right|+\left|1-\sqrt{3}\right| =$

$= -\left(\sqrt{3}-5\right)-\left(1-\sqrt{3}\right) = 5-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1 = 4$ ■

1.107. Упростите выражение:

1) $\sqrt{64a^{10}b^6}$, $a>0$, $b>0$; 2) $\sqrt{25a^{16}x^{10}}$, $x<0$

3) $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{b^4}}$, $a>0$; 4) $4x^2y\sqrt{\frac{x^{10}}{36y^{12}}}$, $x<0$.

1.108. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $0,5\sqrt{60a^2}$, $a>0$; 2) $2,1\sqrt{300x^4}$; 3) $\sqrt{-3c^3}$; 4) $\sqrt{9a^2b}$, $a<0$;

5) $0,2\sqrt{225a^5}$; 6) $a\sqrt{18a^2b}$; 7) $-b\sqrt{48ab^4}$; 8) $\sqrt{-5m^7}$.

4) ▲ $\sqrt{9a^2b}=\sqrt{9}\sqrt{a^2}\sqrt{b}=3\cdot|a|\sqrt{b}=-3a\sqrt{b}$ ■

1.109. Внесите множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{\frac{1}{x}}$; 2) $ab\sqrt{\frac{b}{a}}$, $a>0, b>0$; 3) $2ab\sqrt{\frac{a}{2b}}$, $a<0, b<0$;

4) $-x^2\sqrt{5}$; 5) $x\sqrt{-\frac{2}{x}}$; 6) $-ab\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, $a>0, b>0$.

1.110. Сравните числа:

1) $0,2\sqrt{200}$ и $10\sqrt{3}$; 2) $0,5\sqrt{108}$ и $9\sqrt{3}$; 3) $2,5\sqrt{63}$ и $4,5\sqrt{28}$.

1.111. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{72}; \sqrt{30}; 7\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{\frac{7}{2}}$; $\sqrt{17}$; $\frac{1}{2}\sqrt{62}$; 3) $8\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\sqrt{41}$; $\frac{2}{5}\sqrt{250}$.

1) ▲ $\frac{2}{3}\sqrt{72}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot 72}=\sqrt{32}$,

$7\sqrt{2}=\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{98}$; $\sqrt{30}<\sqrt{32}<\sqrt{98}\Rightarrow\sqrt{30}$; $\frac{2}{3}\sqrt{72}$; $7\sqrt{2}$. ■

1.112. Выполните умножение:

1) $\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\sqrt{mn}$;

3) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; 4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)$.

1.113. Упростите выражение:

1) $\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}+x\right)$; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(m+n+\sqrt{mn}\right)$;

3) $\left(\sqrt{a}+2\right)\left(a-2\sqrt{a}+4\right)$; 4) $\left(x+\sqrt{y}\right)\left(x^2-x\sqrt{y}+y\right)$.

1.114. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-4}-\dfrac{1}{3\sqrt{2}+4}$; 2) $\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}$;

3) $\dfrac{1}{11-2\sqrt{30}}-\dfrac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

1.115. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$;

4) $\dfrac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$; 5) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; 6) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; 8) $\dfrac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$; 9) $\dfrac{\left(\sqrt{10}-1\right)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$.

1) ▲ $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3-\left(\sqrt{y}\right)^3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

$=x+\sqrt{xy}+y$ ■

1.116. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\dfrac{9+3\sqrt{a}+a}{3+\sqrt{a}}$; 3) $\dfrac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}$;

4) $\dfrac{a^2b+2a\sqrt{b}+4}{a\sqrt{b}+2}$; 5) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$; 6) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$;

7) $\dfrac{7-\sqrt{a}}{49-7\sqrt{a}+a}$; 8) $\dfrac{\sqrt{mn}+1}{mn+\sqrt{mn}+1}$; 9) $\dfrac{a+2\sqrt{2a}+2}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$;

10) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; 11) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$; 12) $\dfrac{x-2\sqrt{3x}+3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$.

10) ▲ $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\cdot 2}=\dfrac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ■

C

1.117. Упростите выражение:

1) $a^2+a\sqrt{3a}+3a+3\sqrt{3a}+9,\ a>0$;

2) $4x^2-2x\sqrt{2x}+2x-\sqrt{2x}+1,\ x>0$.

1.118*. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y=-\dfrac{2\sqrt{x^2}}{x}$; 3) $y=x\sqrt{x^2}$.

1) ▲ $x\neq 0$ – область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, т.е. $(-\infty;\ 0)\cup$ $\cup(0;\ +\infty)$. Если $x>0\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$; если $x<0\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$.

Итак, данную функцию можно записать так: $y=\begin{cases}1, \text{ если } x>0,\\ -1, \text{ если } x<0.\end{cases}$ Ее график изображен на рис. 1.10. ■

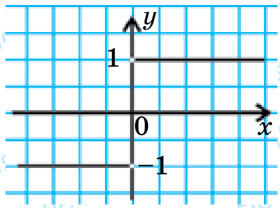


Рис. 1.10

1.119. Найдите значение дроби $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ при $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$.

1.120. Упростите выражение:

1) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$; 2) $\dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}-b\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}+\dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}}$.

1.121. Упростите выражение:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $x\geqslant 2$.

1.122. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}},\ 0{,}5<a<3.$$

1.123. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{a^2-3a}+\sqrt{a^2-4a+3}}{\sqrt{6-2a}}.$$

1.124. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{y}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$;

3) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$; 4) $\dfrac{50}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.

1.125*. Докажите «формулу сложного радикала»:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},\ a>0,\ a^2>b>0.$$

1.126. Упростите выражение:

1) $\sqrt{12+\sqrt{63}}-\sqrt{10{,}5}$; 2) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{\left|12\sqrt{3}-21\right|}-\sqrt{12\sqrt{3}+21}$; 4) $\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}$.

Упражнения для повторения

1.127. Найдите значение выражения:

$$\frac{(y-x)^2}{x+y}:\left(\frac{2xy}{y^2-x^2}+\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}\right) \text{ при } x=8{,}4;\ y=-0{,}6.$$

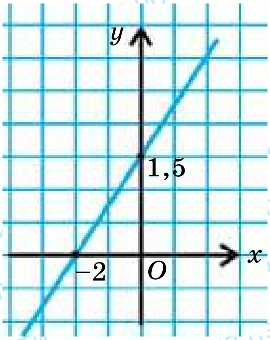


Рис. 1.11

1.128. Сумма двух чисел равна $\sqrt{10}$, а разность равна $\sqrt{6}$. Покажите, что их произведение равно 1.

1.129. Решите уравнение:

1) $x^2-8x=0$; 2) $4y^2-1=0$; 3) $4x^2+1=0$.

1.130. Найдите угловой коэффициент прямой (рис. 1.11).

1.5. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y=\sqrt{x}$

Функция $y=\sqrt{x}$ и ее график

При $x \geqslant 0$ выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл и каждому числу $x \geqslant 0$ соответствует единственное число $\sqrt{x} \geqslant 0$.

Равенство $y=\sqrt{x}$, где $x \geqslant 0$, устанавливает функциональное соответствие между переменными x и y. $D=[0;+\infty)$, является областью определения этой функции.

Чтобы построить график функции $y=\sqrt{x}$, составим таблицу значений x и y с точностью до 0,01:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16

Отметим на координатной плоскости точки с координатами, данными в таблице, и соединим эти точки плавной линией. Тогда получим график, указанный на рисунке 1.12. Это график функции $y=\sqrt{x}$.

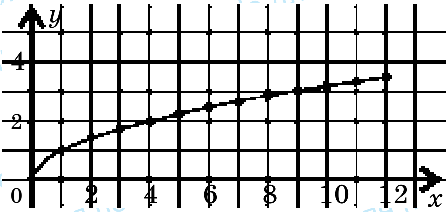


Рис. 1.12

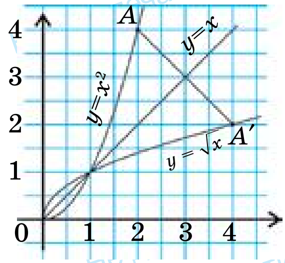


Рис. 1.13

Рассмотрим некоторые свойства функции $y = \sqrt{x}$.

• *Если* $x = 0$, *то* $y = 0$, *т. е. график проходит через начало координат.*

• *Если* $x > 0$, *то* $y > 0$, *т. е. график функции расположен в I координатной четверти.*

• *При* $x \geqslant 0$ *график функции* $y = x^2$ *также лежит в I координатной четверти. Нам хорошо известно, что этот график является правой ветвью параболы.*

• Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$ расположены симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 1.13).

▲ Действительно, симметричная точке $A(a;\ b)$ относительно прямой $y = x$ точка A' имеет координаты $(b;\ a)$.

Если точка $A(a;\ b)$ лежит на графике функции $y = x^2$, то верно равенство $b = a^2$. Отсюда по определению квадратного корня выполняется равенство $a = \sqrt{b}$, т. е. точка $A'(b;\ a)$ лежит на графике функции $y = \sqrt{x}$.

Обратно, если точка $B(u;\ v)$ лежит на графике функции $y = \sqrt{x}$, то верно равенство $v = \sqrt{u}$. Отсюда $u = v^2$, т.е. точка $B'(v;\ u)$ лежит на графике функции $y = x^2, x \geqslant 0$. ■

Подготовьте сведения

Рене Декарт – французский математик и философ, один из основателей аналитической геометрии. Впервые ввел прямоугольную систему координат.

Рене Декарт
(1596–1650)

Геометрическое приложение квадратного корня

С древних времен нахождением квадратного корня из числа занимались геометры. Например, в курсе геометрии будет доказана **теорема Пифагора,** приведенная ниже.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.

Эту теорему древние индусы могли доказывать с помощью рисунков 1.14 (*а* и *б*). На этих рисунках площади закрашенных фигур равны между собой.

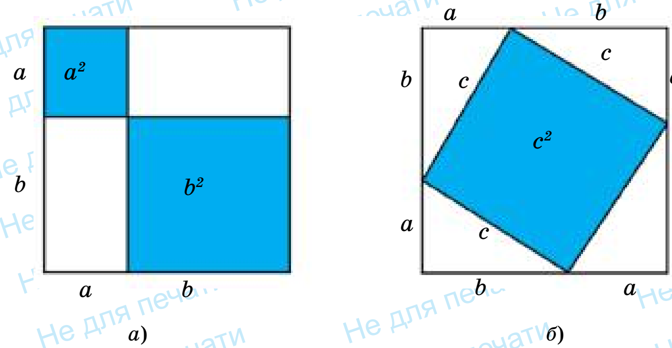


Рис. 1.14

Если на рисунке 1.14,*а* площадь закрашенной фигуры равна $a^2 + b^2$, то на рисунке 1.14,*б* эта площадь равна c^2. Следовательно, $c^2 = a^2 + b^2$. Здесь a и b – катеты, а c – гипотенуза прямоугольного треугольника.

С помощью теоремы Пифагора мы можем определить расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (рис. 1.15) или $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$. Здесь $AC = |x_2 - x_1|$ и $BC = |y_2 - y_1|$. Значит,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Пример 1. Найти расстояние между точками $A(-3;0)$ и $B(9;5)$.

▲ По формуле (1) имеем:

$$AB = \sqrt{(9-(-3))^2 + (5-0)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$ ■

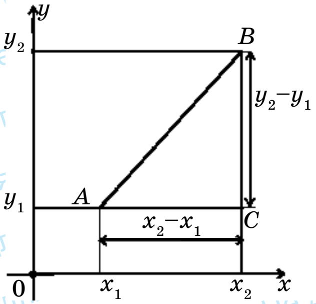


Рис. 1.15

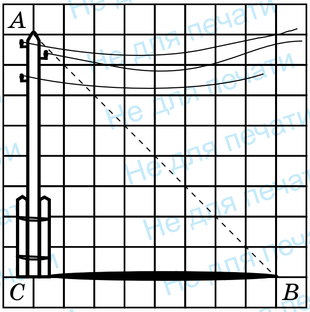


Рис. 1.16

Пример 2. Длина тени 8-метрового столба равна 6 м. Найти расстояние от конца тени до вершины столба.

▲ Так как $AC = 8$ м, $BC = 6$ м (рис. 1.16), то по теореме Пифагора получим:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (м)}. \blacksquare$$

1. Какие свойства функции $y = \sqrt{x}$ вы знаете?
2. Как расположены графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$?
3. Сформулируйте теорему Пифагора.
4. С помощью какой формулы определяется расстояние между точками на координатной плоскости?

Практическая работа

Постройте в одной координатной системе графики функций $y = x^2$, $(x \leqslant 0)$, $y = x$, $y = -\sqrt{x}$, $(x \geqslant 0)$. На графике какой функции лежат точки $A(-2; 4)$, $C(4; 4)$ и $B(4; -2)$? Сделайте выводы. Найдите длины отрезков AB, AC и BC. Является ли треугольник ABC прямоугольным? Обоснуйте ответ.

Упражнения

A

1.131. Площадь квадрата равна S, а сторона – a. Выразите формулой зависимость: 1) S от a; 2) a от S.

1.132. С помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ найдите значение переменной: 1) y при x, равном 0,5; 1,5; 2,5; 2) x при y, равном 0,5; 1,5; 2,5.

1.133. С помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ найдите значения: 1) функции при x, равном 1,4; 2,3; 5,5; 2) аргумента при y, равном 1,2; 1,8; 2,5.

1.134. Какие из точек $A(16; 4)$, $B(16; -4)$, $C(0{,}09; 0{,}3)$, $D(-25; 5)$ лежат на графике функции $y = \sqrt{x}$?

1.135. Стороны прямоугольника равны 3 см и 4 см. Найдите диагональ.

1.136. Найдите расстояние между точками:

1) $O(0; 0)$ и $A(4; 3)$; 2) $B(5; 2)$ и $C(1; -1)$;

3) $D(-5; 6)$ и $E(2; 6)$; 4) $M(-6; 0)$ и $N(2; 6)$.

1) ▲ $BC = \sqrt{(1-5)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ ■

1.137. Найдите неизвестную сторону прямоугольного треугольника, если c – гипотенуза, a и b – катеты:

1) $a = 12$ см, $b = 5$ см; 2) $a = 3$ м, $c = 5$ м; 3) $b = 7$ м, $c = 25$ м.

B

1.138. Площадь круга радиуса r определяется формулой $S = \pi r^2$. Обозначив диаметр круга буквой d, выразите формулой зависимость: 1) S от d, 2) r от S; 3) d от S.

1.139. Обозначив площадь полной поверхности куба со стороной a буквой S, выразите формулой зависимость: 1) S от a; 2) a от S.

1.140. Найдите такие значения a, чтобы точка: 1) $A(a; 2)$; 2) $B\left(a; \sqrt{5}\right)$; 3) $C(25; a)$; 4) $D(7; a)$ принадлежала графику функции $y = \sqrt{x}$.

1) ▲ $2 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$ точка $A(4; 2)$ лежит на графике функции $y = \sqrt{x}$. ■

1.141. Какие значения принимает функция $y = \sqrt{x}$, если известно, что $x \in [1; 4]$. Ответ запишите в виде промежутка.

1.142. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=5$; 2) $\sqrt{x}=11$; 3) $\sqrt{x}=\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{x}=2\sqrt{3}$.

1.143. Пересекается ли график функции $y=\sqrt{x}$ с прямой, заданной уравнением: 1) $y=1$; 2) $y=5$; 3) $y=-3$? Если пересекается, то найдите точку пересечения.

1.144. Через верхние части столбов высотой 5 м и 12 м, отстоящих друг от друга на расстоянии 24 м, натянут провод. Найдите длину этого провода.

1.145. Найдите стороны треугольника с вершинами в точках $A(-2; 3)$, $B(3; 3)$ и $C(-1; -2)$.

1.146. Будет ли треугольник с вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(3; 1)$ и $C(1; 7)$ прямоугольным?

C

1.147. Найдите ординату точки P, если известно, что ее абсцисса равна 5 и $PQ=10$, где $Q(-1; 3)$.

1.148. В каком промежутке должен меняться аргумент функции $y=\sqrt{x}$ для того, чтобы ее значения принадлежали промежутку: 1) $[0; 4]$; 2) $[0{,}04; 1]$, 3) $[25; 225]$?

1.149*. Постройте график функции:

1) $y=-\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{-x}$, $x\leqslant 0$; 3) $y=\sqrt{|x|}$; 4) $y=2\sqrt{x}$.

1.150. При каких значениях a график функции:

1) $y=a\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{ax}$; 3) $y=\sqrt{a|x|}$ проходит через точку A(3; 1)?

1.151*. С помощью построения и измерения найдите приближенное значение выражения:

1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{34}$; 3) $\sqrt{125}$; 4) $\sqrt{229}$. (Укажите 2 способа.)

Упражнения для повторения

1.152. Найдите значения выражений:

1) $2\sqrt{0,09} - 0,2\sqrt{225}$;   2) $0,1\sqrt{400} + 2,1\sqrt{\dfrac{1}{9}}$.

1.153. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{4-3x}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{y-5}}$;   3) $\dfrac{1}{\sqrt{y}-5}$;   4) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+5}$.

1.154. Дана таблица частот вариационного ряда случайной выборки:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	3	5	7	6	2

Найти: 1) объем выборки; 2) арифметическое среднее; 3) моду и медиану; 4) постройте полигон частот.

1.155. Из пункта A вверх по реке вышла моторная лодка со скоростью 10 км/ч. Через 45 мин из-за поломки лодка остановилась и через 3 ч возвратилась в исходный пункт. Найдите скорость течения реки.

1.156. Докажите неравенство $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Дополнительные упражнения к разделу 1

1.157. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}$;   2) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$;

3) $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$;   4) $\sqrt{\sqrt{68-\sqrt{4608}}}$.

1.158. Разложите выражение на множители:

1) $7 - \sqrt{14} + \sqrt{7}$;   2) $\sqrt{6} + \sqrt{27} - \sqrt{18}$;

3) $\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x+y}$, $x > 0, y > 0,\ x \geqslant y$;   4) $\sqrt{ab+ac} - \sqrt{b^2+bc}$, $a > 0, b > 0, c > 0$;

5) $2 + y\sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - \sqrt{y}$;   6) $mn + m\sqrt{m} + n\sqrt{n} + \sqrt{mn}$.

1.159. При каких значениях переменной верно равенство:

1) $\sqrt{x^6} = -x^3$; 2) $\sqrt{y^4} = y^2$;

3) $\sqrt{c^4} = -c^2$; 4) $\sqrt{4m^4 - 4m + 1} = 1 - 2m$;

5) $\sqrt{n^4 + 6n^2 + 9} = n^2 + 3$; 6) $\sqrt{(a-5)^2} = 5 - a$?

1.160. Вычислите:

1) $\sqrt{146{,}5^2 - 109{,}5^2 + 27 \cdot 256}$; 2) $\sqrt{117{,}5^2 - 26{,}5^2 - 1440}$;

3) $\sqrt{\dfrac{149^2 - 76^2}{37^2 - 36^2}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{129^2 - 8^2}{93^2 - 44^2}}$.

1.161. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\dfrac{a^{10}}{16b^6}}$, $a < 0, b < 0$; 2) $\sqrt{121a^{16}b^{10}}$, $a > 0$, $b < 0$;

3) $\dfrac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}$, $a < 0$, $b < 0$; 4) $\dfrac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} + \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a < 0$, $b < 0$.

1.162. Выполните действия:

1) $3\sqrt{48} - \sqrt{75} + \dfrac{1}{7}\sqrt{147}$; 2) $\sqrt{25a^5} + 4a\sqrt{a^3} - a^2\sqrt{a}$;

3) $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2} - \dfrac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2$; 4) $\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

1.163. Найдите значение выражения: 1) $x^2 + 2x + 3$ при $x = \sqrt{3} - 1$;
2) $x^2 - 6x + 3$ при $x = 3 - \sqrt{7}$.

1.164. Упростите выражение:

1) $\sqrt{7 + \sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{7 - \sqrt{24}}$;

3) $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$; 4) $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$;

5) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$; 6) $2\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

2) ▲ $\sqrt{7 - \sqrt{24}} = \sqrt{7 - \sqrt{4 \cdot 6}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{6} + 1} =$
$= \sqrt{\left(\sqrt{6} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{6} - 1\right| = \left| \quad \sqrt{6} > 1 \right| = \sqrt{6} - 1$ ■

1.165. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$; 3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

1.166. Сравните числа:

1) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$ и $\sqrt{7}-\sqrt{5}$;

2) $\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{8}}}$ и $1+\sqrt{2}$.

1.167. Внесите множитель под знак корня:

1) $2xy\sqrt{\dfrac{x}{2y}}$, $x<0$, $y<0$; 2) $mn\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$, $m<0$, $n>0$;

3) $(y-1)\sqrt{\dfrac{3y}{1-y^2}}$, $0<y<1$; 4) $(2-x)\sqrt{\dfrac{5x}{x^2-4}}$, $-2<x<0$.

1.168. Решите уравнение:

1) $10\sqrt{(x-3)^2}=8$; 2) $(x+1)\sqrt{3}=x+3$;

3) $\left(2-x\sqrt{6}\right)\sqrt{2}=2\cdot\left(x-\sqrt{6}\right)$; 4) $\left(x\sqrt{5}-2\right)\sqrt{10}=5x-2\sqrt{5}$.

1.169. Вычислите:

1) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$;

3) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^4$; 4) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^6$.

1.170. Разложите на множители:

1) $x-6\sqrt{x}-7$; 2) $m+\sqrt{m}-6$;

3) $a-6\sqrt{a}+5$; 4) $2y+\sqrt{y}-3$.

1.171. Постройте график функции:

1) $y=\sqrt{x}+2$; 2) $y=\sqrt{x}-2$; 3) $y=3\sqrt{x}$; 4) $y=-3\sqrt{x}$.

1.172. Известно, что m, n и $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ – рациональные числа. Докажите, что $\sqrt{m}$ и $\sqrt{n}$ также являются рациональными числами.

1.173. Докажите иррациональность числа:

1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$.

1.174. Вычислите:

1) $\sqrt{15+2\sqrt{26}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{1+2\sqrt{26}}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{1+2\sqrt{26}}}$;

2) $\sqrt{\dfrac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}}+\sqrt{\dfrac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}}$.

1.175. Упростите выражение:

1) $\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}+\dfrac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}}-\dfrac{10}{\sqrt{19}+3}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

1.176. Преобразуйте выражение:

1) $ab-\sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{b^2-1}$; 2) $ab+\sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{b^2-1}$

при $a=\dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{1}{m}\right)$, $b=\dfrac{1}{2}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)$.

Раздел 2. Квадратные уравнения

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:
- будем знать определение квадратного уравнения;
- будем различать виды квадратных уравнений;
- будем решать квадратные уравнения;
- будем применять теорему Виета;
- усвоим понятие корня квадратного трехчлена;
- будем выделять полный квадрат двучлена из трехчлена;
- будем раскладывать квадратный трехчлен на множители;
- будем решать уравнения вида $|ax^2+bx|+c=0$, $ax^2+b|x|+c=0$;
- будем решать дробно-рациональные уравнения;
- будем решать уравнения, приводимые к квадратным уравнениям;
- будем решать текстовые задачи с помощью квадратных уравнений;
- будем решать текстовые задачи с помощью дробно-рациональных уравнений;
- будем знать способы решения систем уравнений второго порядка.

2.1. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

Определение квадратного уравнения

Пример 1. Айнур заметила, что все мальчики, вошедшие в класс, жмут друг другу руки. Когда все мальчики вошли в класс, она насчитала, что всего было совершено 45 рукопожатий. Определим количество мальчиков, вошедших в класс.

▲ Через x обозначим количество мальчиков, вошедших в класс. Тогда каждый мальчик совершает $(x-1)$ рукопожатий с другими мальчиками. Количество всех рукопожатий будет равно $\frac{x(x-1)}{2}$, т.к. число $x(x-1)$ учитывает каждое рукопожатие 2 раза (например, когда Санжар подает руку Азамату, то и Азамат подает руку Санжару). Тогда, по подсчетам Айнур, верно равенство $\frac{x(x-1)}{2}=45$. Отсюда получим уравнение $x^2-x-90=0$. Такие уравнения называются **квадратными уравнениями.** Мы в этом разделе научимся решать квадратные уравнения посредством формул. Данное уравнение мы решим методом перебора. Проверяя числа 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., находим, что $x=10$.

Ответ: в класс вошли 10 мальчиков. ■

Определение. Уравнение вида ax^2+bx+c, $(a\neq 0)$ называется **квадратным уравнением**. Здесь a, b, c – некоторые числа, а x – переменная.

a $(a\neq 0)$ называется **первым коэффициентом**, b – **вторым коэффициентом**, а c – **свободным членом.**

Например, $5x^2-x-4=0$ – квадратное уравнение, здесь $a=5$, $b=-1$, $c=-4$.

Левая часть квадратного уравнения, т. е. многочлен ax^2+bx+c называется **квадратным трехчленом.**

Если при x, равном u, левая часть квадратного уравнения обращается в нуль, т. е. справедливо тождество $au^2+bu+c=0$, то u называется **корнем квадратного уравнения.** Например, число 2 является корнем квадратного уравнения $2x^2+3x-14=0$, т.к. $2\cdot 2^2+3\cdot 2-14=8+6-14=$ $=14-14=0$. А число 5 не может быть корнем уравнения $-2x^2+3x-14=$ $=0$, т.к. $2\cdot 5^2+3\cdot 5-14=50+15-14=51\neq 0$.

Если $a=1$, то соответствующее квадратное уравнение называется **приведенным квадратным уравнением.** Например, $x^2-5x+6=0$, x^2+ $+5x-1=0$ – приведенные квадратные уравнения.

Итак:

1) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ – общий вид квадратного уравнения;

2) $x^2+px+q=0$ – общий вид приведенного квадратного уравнения. Здесь p и q — некоторые числа.

Решение неполных квадратных уравнений

1) $ax^2+bx=0$, $c=0$; 2) $ax^2+c=0$, $b=0$; 3) $ax^2=0$, $b=c=0$. Это неполные квадратные уравнения.

1 $ax^2+bx=0$, $c=0$. Разложим на множители:

$$x(ax+b)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ ax+b=0\end{array}\right.\Rightarrow\quad x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}.$$

Пример 2. Решим уравнение $5x^2+4x=0$.

▲ Здесь $a=5$, $b=4$, $c=0\Rightarrow 5x^2+4x=0\Rightarrow x(5x+4)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 5x+4=0\end{array}\right.\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=0, x_2=-\dfrac{4}{5}$. ■

2 $ax^2+c=0, b=0\Rightarrow ax^2=-c\Rightarrow x^2=-\dfrac{c}{a}$.

Если $-\dfrac{c}{a}\geqslant 0$, то уравнение имеет 2 корня: $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Если $-\dfrac{a}{c}<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Пример 3. Решим уравнение $x^2 - 3 = 0$.

▲$a = 1,\ b = 0,\ c = -3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{1,2} \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$. ■

Пример 4. Решим уравнение $3x^2 + 2 = 0$.

▲$3x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} < 0$, но квадрат числа не может быть отрицательным, т.е. уравнение не имеет корней. Ответ: $\varnothing$. ■

3 $ax^2 = 0$, $(b = c = 0)$. Считается, что это уравнение имеет равные между собой два корня: $x_1 = x_2 = 0$.

1. Какие уравнения называются квадратными?
2. Почему необходимо, чтобы первый коэффициент квадратного уравнения не должен быть равным нулю?
3. Какие числа называются корнями квадратного уравнения?
4. Что такое квадратный трехчлен?
5. Какие уравнения называются неполными квадратными уравнениями?
6. Как решаются неполные квадратные уравнения?
7. Всегда ли неполные квадратные уравнения имеют корни? Какие уравнения всегда имеют два корня?

Практическая работа

Под дачу было выделено 6 соток (1 сотка = 100 м^2) земельного участка квадратной формы. Требуется оградить данный участок сеткой-рабицей (металлическая сетка, плетенная из проволоки). Один рулон этой сетки растягивается на 10 м. Сколько рулонов сетки нужно купить, если требуется оставить проем в 3 м для ворот? Сколько метров сетки примерно останутся лишними? Посчитайте расходы, если 1 рулон сетки стоит 10 тыс. тенге.

Упражнения

А

2.1. Выпишите коэффициенты квадратного уравнения:

1) $x^2 - 2x - 1 = 0$; 2) $3x^2 + x + 1 = 0$; 3) $-2x^2 + 3x = 0$;

4) $x^2 - 5 = 0$; 5) $-x^2 + 6x - 7 = 0$; 6) $12x^2 = 0$.

2.2. Определите неполные квадратные уравнения и укажите коэффициент, равный нулю:

1) $7x^2 - 3x = 0$; 2) $2x + 5 = 0$; 3) $x^2 + x - 1 = 0$;
4) $-x^2 - x + 3 = 0$; 5) $-4x^2 + 1 = 0$; 6) $8x^2 = 0$.

2.3. Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$:

1) $(2x - 1)(2x + 1) = x(2x + 3)$; 2) $(3x + 2)^2 = (x + 2)(x - 3)$;
3) $(x + 1)(x + 2) = (2x - 1)(x - 2)$; 4) $4x^2 - 2x(3x + 1) = 5$;
5) $(x + 3)(3x - 2) = (4x + 5)(2x - 3)$; 6) $x^2 + (1 - x)(1 - 3x) = x$.

5) ▲ $(x+3)(3x-2)=(4x+5)(2x-3) \Rightarrow 3x^2-2x+9x-6=8x^2-$
$-12x+10x-15 \Rightarrow (8x^2-3x^2)+(-12x+10x+2x-9x)+(-15+$
$+6)=0 \Rightarrow 5x^2-9x-9=0$ ■

2.4. Замените уравнение равносильным ему квадратным уравнением:

1) $-5x(x+6)=4(x-3)-10$; 2) $(x-8)(2x+3)=(3x-5)(x+4)$;
3) $(x-3)(3x+9)=(x-8)(x+9)$; 4) $(y-7)(7y+49)=(y+8)(y-7)$.

2.5. Решите уравнение:

1) $x^2 = 64$; 2) $y^2 = 0{,}09$; 3) $3x^2 = 48$; 4) $x^2 = 3$;
5) $y^2 - 10 = 39$; 6) $x^2 + 5 = 30$; 7) $5t^2 - 3 = 77$; 8) $\frac{1}{2}x^2 = \frac{8}{9}$.

2.6. Найдите корни уравнения:

1) $2x^2 - 5x = 0$; 2) $5x^2 + 7x = 0$;
3) $2x - 5x^2 = 0$; 4) $4m^2 - 3m = 0$;
5) $y^2 - 2y - 8 = 2y - 8$; 6) $3u^2 + 7 = 6u + 7$.

2) ▲ $5x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(5x + 7) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{7}{5}$ ■

2.7. Имеет ли уравнение корни? Если имеет, то найдите их.

1) $4x^2 + 1 = 0$; 2) $2m^2 - 3m = 8 - 3m$;
3) $5n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$; 4) $10 - 2x^2 = x^2 - x + 10$;
5) $3y^2 + 4y + 4 = 3 + 4y$; 6) $(2x - 3)^2 + 4 = 0$.

2.8. Решите уравнение:

1) $3x^2-4x=0$; 2) $4x^2-9=0$; 3) $-5x^2+6x=0$; 4) $-x^2+3=0$;
5) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$; 6) $6u^2-u=0$; 7) $6m^2-1=0$; 8) $2y + y^2 = 0$.

7) ▲ $6m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Ответ: $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. ■

B

2.9. Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$:

1) $(x - 3)(3x + 2) = (5x - 4)(3x - 2)$;
2) $(2x + 7)(7 - 2x) = 49 + x \cdot (x + 2)$;
3) $\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{2x+3}{2x-1}$;   4) $\frac{x-1}{x+3} + \frac{5x-4}{4x+1} = 1$;
5) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x(x - 8)(x + 9)$;
6) $(x + 7)(x^2 - 7x + 49) = x(x + 8)(x - 7)$.

4) ▲ $\frac{x-1}{x+3} + \frac{5x-4}{4x+1} = 1 \Rightarrow (x-1)(4x+1) + (5x-4)(x+3) = (x+3) \times$
$\times (4x+1) \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 + 5x^2 + 11x - 12 = 4x^2 + 13x + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x^2 - 5x + 16 = 0$ ■

2.10. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{5}x^2 - 5 = 0$;   2) $9y^2 - 6{,}25 = 0$;
3) $1{,}44 - x^2 = 3x^2$;   4) $\frac{5}{7}x^2 = -3{,}5 + x^2$;
5) $(2y - 1)^2 = 10 - 4y$;   6) $(3m - 2)(3m + 2) = 5m^2$.

2.11. Найдите корни уравнения:

1) $\frac{x^2 - 2x}{4} = \frac{3x^2 + 2x}{3}$;   2) $\frac{5y - y^2}{2} = \frac{y^2 + 3y}{5}$;
3) $(4y - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$;   4) $(7m + 6)(6 - 7m) = 36 - m(m + 1)$.

2.12. Решите уравнение:

1) $(x - 2)^2 - 49 = 0$;   2) $9(2x + 3)^2 - 25 = 0$;
3) $2(3x + 5)^2 = 7(3x + 5)$;   4) $(3x - 1)^2 = 4 - 12x$.

2) ▲ $9(2x + 3)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x + 3)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow 2x + 3 = \pm\frac{5}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = -3 \pm \frac{5}{3} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{6}$. Ответ: $-\frac{2}{3}$; $-2\frac{1}{3}$. ■

2.13. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{2x+4}{x-3}$; 2) $\dfrac{2-3y}{3-y}=\dfrac{y+2}{y+3}$;

3) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+2}{x-1}+3=0$; 4) $\dfrac{7x+5}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}=-5$.

2.14. Квадрат какого числа в 2 раза больше самого числа? Найдите это число.

2.15. Произведение двух смежных натуральных чисел в три раза больше меньшего из данных чисел. Найдите эти числа.

2.16. Длина земельного участка прямоугольной формы в 5 раз больше его ширины. Если увеличить ширину на 9 м, то его площадь увеличится в 4 раза. Найдите первоначальные размеры участка.

2.17. Ширина прямоугольника в 5 раз меньше его длины, а площадь равна 720 см^2. Найдите ширину и длину прямоугольника.

▲ Пусть a – ширина прямоугольника, тогда его длина равна $5a \Rightarrow 5a^2 = 720 \Rightarrow a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$ м. Ответ: 12 м, 60 м. ■

C

2.18. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=2\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{y-2}{y+2}+\dfrac{y+2}{y-2}=3\dfrac{1}{3}$;

3) $\dfrac{5m+7}{m-2}-\dfrac{2m+21}{m+2}=8\dfrac{2}{3}$; 4) $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{3}{x+2}$.

2.19*. Решите уравнение:

1) $x^2-3|x|=0$; 2) $5y^2+4|y|=0$;

3) $5y^2-4|y|=0$; 4) $2u^2+3|u|-5u=0$;

5) $4t^2-3|t|+t=0$; 6) $2m^2+|m|-7m=0$.

2.20*. Решите уравнение:

1) $x|x|-5x=0$; 2) $2x^2-3x|x|+1=0$; 3) $9x^2+\dfrac{x}{|x|}=0$;

4) $9x^2-\dfrac{x}{|x|}=0$; 5) $3x^2-\dfrac{4x^2}{|x|}=0$; 6) $5x^2+\dfrac{x^2}{5|x|}=0$.

4) ▲ Если $x > 0$, то $9x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x \in \varnothing$;
если $x < 0$, то $9x^2 - 1 = 0$ и $x = \pm\frac{1}{3}$; $x = -\frac{1}{3}$. Ответ: $-\frac{1}{3}$. ■

2.21*. Решите уравнение:
1) $x(x - 1)(x - 3) - 25 = (x - 5)(x + 5) + 3x$;
2) $|x - 2| \cdot (x + 2)^2 = 4x - 8$.

2.22. Напишите общий вид квадратного уравнения, у которого: 1) один корень равен нулю; 2) корни равны по модулю, но имеют противоположные знаки; 3) оба корня равны нулю.

2.23*. При каких значениях a один из корней уравнения равен нулю:
1) $6x^2 - 5x + a - 3 = 0$; 2) $3x^2 + x - a^2 + 9 = 0$;
3) $4x^2 + (a - 1)x + 1 - a^2 = 0$; 4) $x^2 + (a + 3)x + |a| - 3 = 0$?
Могут ли оба корня уравнения быть равными нулю?

2.24. При каких значениях c корни уравнения равны по модулю, а знаки противоположны:
1) $x^2 - (c + 3)x + 4c + 3 = 0$; 2) $2x^2 + (|c| - 3)x - 32 = 0$?

2.25. Две прямые дороги пересекаются под прямым углом. С перекрестка по разным дорогам одновременно тронулись две автомашины со скоростями 80 км/ч и 60 км/ч. Через сколько времени расстояние между ними будет равно 100 км?

Упражнения для повторения

2.26. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:
1) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$; 2) $\frac{x + 2}{\sqrt{4 - x^2}}$; 3) $\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{\sqrt{17} + \sqrt{8}}}{\sqrt{\sqrt{17} - \sqrt{8}}}$.

2.27. Найдите наименьшее значение выражения:
1) $x^2 + 4$; 2) $x^2 - 4$; 3) $\sqrt{x} + 1$.

2.28. Запишите заштрихованную область с помощью системы неравенств (рис. 2.1).

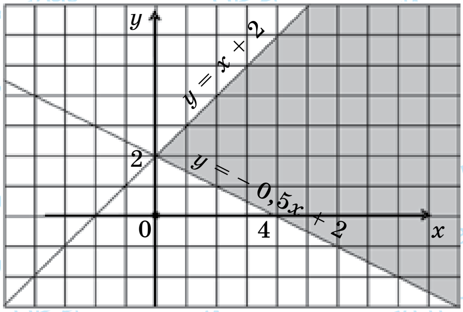


Рис. 2.1

2.2. ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Формула для общего случая

Пример 1. Решим квадратное уравнение $3x^2 - 6x + 2 = 0$.

▲ Сначала выделим полный квадратного трехчлена:
$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x) + 2 = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 2 = 3(x - 1)^2 - 3 + 2 =$
$= 3(x - 1)^2 - 1$.

Тогда данное квадратное уравнение записывается так: $3(x - 1)^2 - 1 = 0$ или $(x - 1)^2 = \dfrac{1}{3}$.

Отсюда

$|x - 1| = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x - 1 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $x_{1/2} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ■

Решите уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. **(1)**

▲ $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\cdot\dfrac{b}{2a}\cdot x\right) + c =$

$= a\left(x^2 + 2\cdot\dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}\right) + c - \dfrac{b^2}{4a} = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Тогда квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

записывается в виде

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0,$$

или в виде

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) равносильны. Так как $4a^2>0$, то существование корней уравнения (2) зависит от знака числителя b^2-4ac, называемого **дискриминантом**[1] квадратного уравнения (1). Его обозначают буквой D. Итак, квадратное уравнение (1) записывается в виде

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \quad (3)$$

а) Если $D>0$, то уравнение (3) имеет вид

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{D}{4a^2}}.$$

Откуда

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D=b^2-4ac. \quad (4)$$

В этом случае квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D=b^2-4ac. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) являются **формулами корней квадратного уравнения.**

б) Если $D=0$, то уравнение (3) имеет вид

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, откуда $x=-\frac{b}{2a}$.

В этом случае квадратное уравнение имеет один корень (иногда говорят, что уравнение имеет два равных корня):

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

в) Если $D<0$, то из неравенств $\frac{D}{4a^2}<0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$ следует, что равенство (3) не может выполняться ни при каком действительном значении переменной x. В этом случае квадратное уравнение не имеет действительных корней. ■

[1] Это слово произошло от латинского слова *discriminatio* – определение, различение, разделение. По знаку дискриминанта можно определить (различить), сколько корней имеет данное квадратное уравнение.

Пример 2. Решим уравнение $3x^2 - 6x + 2 = 0$ с помощью формулы.

▲ $a = 3$, $b = -6$, $c = 2$. Тогда $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 = 36 - 24 = 12 > 0$, т.е. уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. ■

Пример 3. Решим уравнение $4x^2 - 5x - 21 = 0$.

▲ Здесь $a = 4$, $b = -5$, $c = -21$. Тогда

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-21) = 25 + 336 = 361 = 19^2$.

Т. к. $D > 0$, то из формулы (4) имеем:

$$x_{1/2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{19^2}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 19}{8}.$$

Отсюда $x_1 = \frac{5 - 19}{8} = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{5 + 19}{8} = 3$. ■

Пример 4. Решим уравнение $2x^2 - 7x = 0$.

▲ Записав это неполное квадратное уравнение в виде $x(2x - 7) = 0$, мы можем легко найти его корни: $x_1 = 0$, $x_2 = 3{,}5$. Однако эти корни можно найти и с помощью формулы (4). Здесь $a = 2$, $b = -7$, $c = 0$. Тогда $D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 7^2$. Т. к. $D > 0$, то из формулы (4) имеем:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 7}{4}.$$ Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 3{,}5$. ■

Пример 5. Решим уравнение $3x^2 - 2x + 7 = 0$.

▲ Т.к. $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 4 - 84 = -80 < 0$, то уравнение не имеет корней. ■

Пример 6. Решим уравнение $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

▲ Т. к. $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, то $x_1 = x_2 = \frac{12}{2 \cdot 9} = \frac{2}{3}$. ■

Пример 7. Решим уравнение $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

▲ $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7 = 144 - 112$. Т.к. $D > 0$, то из формулы (4) имеем:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{32}}{2 \cdot 4} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $x_1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$. ■

Из вычислений следует, что дискриминант квадратного уравнения не всегда является квадратом рационального числа, т. е. корни квадратного уравнения не всегда могут выражаться рациональными числами.

Формула в случае, когда b – четное число

Если b является четным числом, то формулу (4) можно упростить. Действительно, если $b = 2k$, то $D = b^2 - 4ac = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$. Если $D > 0$, то из формулы (4) имеем:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4\left(k^2 - ac\right)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ т. е.}$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ где } b = 2k. \quad (6)$$

Если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример 8. Решим уравнение $9x^2 - 14x + 5 = 0$.

▲ Т. к. $b = -14 = -2 \cdot 7$, то из формулы (6) имеем:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 9 \cdot 5}}{9} = \frac{7 \pm 2}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{9},\ x_2 = 1.$$ ■

Практическая работа

В школе прошел круговой турнир по игре “Тоғызқұмалақ”. По правилам игры каждая пара соперников в начале партии и в ее конце должны обменяться рукопожатиями. В турнире было зафиксировано всего 306 рукопожатий. Каково количество участников данного турнира?

Упражнения

А

2.29. В уравнении, заданном в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите коэффициенты a, b и c, определите дискриминант и количество корней:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
2) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
3) $2x^2 + x - 3 = 0$;
4) $3x^2 - 2x - 1 = 0$;
5) $3x^2 - 13x + 14 = 0$;
6) $5x^2 - 9x - 2 = 0$;
7) $y^2 - y - 20 = 0$;
8) $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

2.30. Найдите корни уравнения:

1) $x^2 + 7x - 60 = 0$; 2) $y^2 - 10y - 24 = 0$;
3) $m^2 + m - 90 = 0$; 4) $3t^2 + 7t + 4 = 0$;
5) $3x^2 + 32x + 80 = 0$; 6) $2x^2 + 9x - 486 = 0$;
7) $3x^2 - 6x + 3 = 0$; 8) $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

2.31. Решите уравнение:

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; 2) $2x^2 + x + 2 = 0$;
3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $x^2 + 5x - 6 = 0$.

2.32. Решите уравнение:

1) $14x^2-5x-1=0$; 2) $2x^2+x+67=0$; 3) $2p^2+7p-30=0$;
4) $y^2-3y-5=0$; 5) $5x^2-11x+2=0$; 6) $9y^2-30y+25=0$;
7) $81y^2-18y+1=0$; 8) $y^2-11y-152=0$; 9) $8z^2-7z-1=0$.

2.33. Решите уравнение с помощью выделения полного квадрата двучлена, полученный результат проверьте с помощью формулы (6):

1) $3x^2-14x+16=0$; 2) $x^2+2x-80=0$; 3) $15y^2-22y-37=0$;
4) $5x^2-6x+1=0$; 5) $4x^2-36x+77=0$; 6) $x^2-22x-23=0$.

2.34. Решите уравнение с помощью выделения полного квадрата двучлена:

1) $7x^2-20x+14=0$; 2) $y^2-10y-25=0$; 3) $8z^2-14z+5=0$;
4) $x^2-8x-84=0$; 5) $x^2+6x-27=0$; 6) $5t^2+26t-24=0$.

2.35. Решите уравнение:

1) $(x + 3)(x - 4) = -12$; 2) $18 - (x - 5)(x - 4) = -2$;
3) $(3x - 1)^2 = 1$; 4) $5x + (2x + 1)(x - 3) = 0$;
5) $(2x + 3)(3x + 1) = 11x + 30$; 6) $x^2 - 5 = (x - 5)(2x - 1)$.

4) ▲ $5x + (2x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow 5x + 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1{,}5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1{,}5}$ ■

2.36. Составьте квадратное уравнение с корнями, равными:

1) 1 и 2; 2) -3 и 3; 3) -10 и 4; 4) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

1) ▲ Числа 1 и 2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. Тогда имеет место система уравнений $\begin{cases} 1 + p + q = 0, \\ 4 + 2p + q = 0. \end{cases}$

Отсюда $p = -3$ и $q = 2$

Ответ: $x^2 - 3x + 2 = 0$. ■

2.37. Решите уравнение:

1) $(x+4)^2 = 3x + 40$;
2) $(2x-3)^2 = 11x - 19$;
3) $(x+1)^2 = 7918 - 2x$;
4) $(x+2)^2 = 3131 - 2x$.

2.38. Решите уравнение:

1) $x^2 - 0{,}6x + 0{,}08 = 0$;
2) $7 = 0{,}4y + 0{,}2y^2$;
3) $x^2 - 1{,}6x - 0{,}36 = 0$;
4) $z^2 - 2z + 2{,}91 = 0$;
5) $0{,}2y^2 - 10y + 125 = 0$;
6) $\frac{x^2}{3} = 9 - 2x$.

2.39. При каких значениях переменной верно равенство:

1) $\frac{x^2}{7} = 2x - 7$;
2) $\frac{x^2}{3} = \frac{10}{3} - x$;
3) $x^2 + 1{,}2 = 2{,}6x$;
4) $4x^2 = 7x + 7{,}5$?

2.40. При каких значениях x верно равенство:

1) $(5x+3)^2 = 5x + 3$;
2) $(3x+10)^2 = 3x + 10$;
3) $(3x-8)^2 = 3x^2 - 8x$;
4) $(4x+5)^2 = 5x^2 + 4x$?

2.41. Один из корней уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ равен 1. Найдите коэффициент a.

2.42. Является ли число 1 корнем уравнения $ax^2 - (a+c)x + c = 0$? Каков его второй корень?

2.43. Решите уравнение:

1) $4x^2 - 4ax + a^2 - b^2 = 0$;
2) $ax^2 - (2a+1)x + 2 = 0$;
3) $abx^2 + 2(a+b)\sqrt{ab}\,x + (a-b)^2 = 0$;
4) $\left(7 - 4\sqrt{3}\right)x^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)x = 2$;
5) $(a+b)x^2 + 2ax + a - b = 0$;
6) $mnx^2 - (an + bm)x + ab = 0$.

3) ▲ $D = (a+b)^2ab - ab(a-b)^2 = 4a^2b^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-(a+b)\sqrt{ab} - 2ab}{ab} = -\frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = -\frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2,$$

$$x_2 = \frac{-(a+b)\sqrt{ab} + 2ab}{ab} = -\frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

Ответ: $-\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \pm \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$. ■

2.44. Решите уравнение:

1) $6x^2 + 5mx + m^2 = 0$; 2) $x^2 + 2(a - b)x - 4ab = 0$;
3) $56y^2 + ay - a^2 = 0$; 4) $abx^2 - (a^2 - b^2)x - ab = 0$;
5) $2y^2 - (b - 2c)y = bc$; 6) $(m - n)x^2 - nx - m = 0$.

245. При каких значениях a корни уравнения $9x^2 - (2 - a)x - 6 - a = 0$: 1) равны между собой; 2) равны по модулю, а знаки противоположны?

2.46. При каких значениях k число $x = -2$ является корнем уравнения $x^2 - 7x + k = 0$?

C

2.47. Решите уравнение:

1) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$; 2) $x^2 - 2|x| - 15 = 0$;
3) $3x^2 - 4|x| + 1 = 0$; 4) $2x^2 + 3|x| - 5 = 0$.

2.48. Из равенства найдите отношение m к n:

1) $m^2 - 6mn + 8n^2 = 0$; 2) $8m^2 - 14mn + 5n^2 = 0$;
3) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2 - 2\left(\frac{m+n}{m-n}\right) = 3$.

2.49. При каких значениях n корни уравнения $(n - 1)x^2 - 2(n + 1) \times x + n + 4 = 0$ равны между собой?

2.50. Числа p, k, n рациональные. Покажите, что корни уравнения $(p + k + n)x^2 - 2(p + k)x + (p + k - n) = 0$ являются рациональными числами.

2.51. На плоскости отмечено несколько точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая. Сколько точек отмечено на плоскости, если известно, что всего проведено 28 прямых?

2.52. Считая количество прямых равным m, решите задачу **2.51** для общего случая.

2.53. Существует ли выпуклый многоугольник, количество всех диагоналей которого равно 12? 13?

2.54. При каких значениях y значение выражения $y^2 - 6$ равно $5\,|y|$?

▲ *Указание.* В уравнении $y^2 - 6 = 5|y|$ нужно раскрыть знак модуля. ■

2.55. Отношение произведения двух чисел к сумме их квадратов равно 0,3. Каково отношение этих чисел?

2.56. Числа x_1, x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. Докажите, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$.

2.57. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$, $\frac{1}{10+\sqrt{72}}$.

2.58. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $\frac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-b}}$ $(a > b)$.

Упражнения для повторения

2.59. Покажите, что выражение $n^2 - 12n + 40$ при любом n принимает только положительные значения.

2.60. Найдите значение выражения:

$\frac{(b-a)^2}{a+b} : \left(\frac{2ab}{b^2 - a^2} + \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a}\right)$ при $a = 8{,}4$; $b = -0{,}6$.

2.61. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\frac{3x-6}{4}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{1}{2} + x^2}$.

2.3. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Теорема Виета

Пример 1. Решим приведенное квадратное уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$.

▲ $D = 7^2 - 4 \cdot 12 = 1 > 0$. Уравнение имеет два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. ■

Обратите внимание на запись. Что вы можете сказать о корнях данного уравнения?

$x^2 + (-7)x + 12 = 0$

$x_1 + x_2 = 7 = -(-7)$

$x_1 \cdot x_2 = 12$

Теорема 1. *Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \qquad (1)$$

▲ Т. к. $D = q^2 - 4 \geqslant 0$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня:

$x_1 = \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Тогда

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} =$$

$$= \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q} - p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{(-p)^2 - \left(p^2 - 4q\right)}{4} =$$

$= \dfrac{4q}{4} = q$. Итак, $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$. ■

Общий вид теоремы Виета. Пусть x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Эти числа также являются корнями приведенного уравнения $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$. Тогда по теореме Виета имеем: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Обратная теорема

Теорема 2 (обратная теорема). *Если $u + v = -p$, $uv = q$, то u и v являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.*

▲ По условию $\boldsymbol{u + v = -p}$, $\boldsymbol{uv = q}$. Подставив их в уравнение $x^2 + px + q = 0$, получим:

$$u^2 + pu + q = u^2 - u(u + v) + uv = u^2 - u^2 - uv + uv = 0,$$
$$v^2 + pv + q = v^2 - v(u + v) + uv = v^2 - vu - v^2 + uv = 0,$$

т. е. числа u и v являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. ■

Пример 2. Решим уравнение $x^2 + x - 6 = 0$.

▲ Т. к.

$$\begin{cases} 2 + (-3) = -1, \\ 2 \cdot (-3) = -6, \end{cases}$$

то числа 2 и (−3) являются корнями данного уравнения. ■

Пример 3. Решим уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$.

▲Так как $3 + (-5) = -2$ и $3 \cdot (-5) = -15$, то числа $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$ являются корнями данного уравнения. ■

Пример 4. Составим квадратное уравнение, корнями которого являются числа 2 и 7.

▲По теореме Виета имеем:
$x^2 - (2 + 7)x + 2 \cdot 7 = 0$ или $x^2 - 9x + 14 = 0$. ■

Пример 5. Решим систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = -21. \end{cases}$

▲По теореме Виета числа x и y являются корнями уравнения $t^2 - 4t - 21 = 0$. Т. к. $t_1 = -3$, $t_2 = 7$, то $x_1 = -3$, $y_1 = 7$ или $x_2 = 7$, $y_2 = -3$. ■

Случай, когда $a \pm b + c = 0$

Теорема 3. I. *Если для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ верно равенство $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{c}{a}$ являются корнями этого уравнения.*

II. *Если для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ верно равенство $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$ и $\boldsymbol{x_2 = -\dfrac{c}{a}}$ являются корнями этого уравнения.*

▲ I. Пусть $a+b+c=0$. Покажем, что $x_1=1$ и $x_2=\dfrac{c}{a}$ являются решениями уравнения $ax^2+bx+c=0$. В самом деле, $x_1=1 \Rightarrow a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0$, $x_2=\dfrac{c}{a} \Rightarrow a\cdot\left(\dfrac{c}{a}\right)^2+b\cdot\left(\dfrac{c}{a}\right)+c=\dfrac{ac^2+abc+a^2c}{a^2}=\dfrac{ac(c+b+a)}{a^2}=0.$

Утверждение II теоремы 3 доказывается аналогично. ■

Пример 6. С помощью теоремы 3 нужно найти корни уравнения:

1) $7x^2-13x+6=0$; 2) $9x^2+20x+11=0$;
3) $12x^2-7x-5=0$; 4) $5x^2+3x-2=0$.

▲ 1) $7-13+6=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=\dfrac{6}{7}$;

2) $9-20+11=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{11}{9}$;

3) $12-7-5=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\dfrac{5}{12}$;

4) $5-3-2=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=\dfrac{2}{5}$. ■

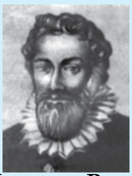
1. Сформулируйте теорему Виета и докажите ее.
2. Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета, и докажите ее.
3. Как можно иначе записать уравнение $ax^2+bx+c=0$, используя теорему Виета?
4. Сформулируйте теорему для определения корней квадратного уравнения в случае $a\pm b+c=0$ и докажите ее.

Практическая работа

Площадь классной комнаты 54 м², а ее длина на 3 м больше ее ширины. После обновления покрытия пола по его краям необходимо прибить рейки плинтуса. Длина каждой рейки плинтуса равна 3 м. Сколько таких реек нужно купить, если ширина входной двери 1 м 20 см? Сколько метров реек плинтуса останутся лишними?

Подготовьте сведения

Франсуа Виет – французский математик. Введя в алгебру систему условных обозначений, создал основу элементарной алгебры. Он одним из первых начал обозначать числа буквами и тем самым существенно развил теорию уравнений.



Франсуа Виет
(1540–1603)

Упражнения

А

2.62. Найдите сумму и произведение корней:

1) $x^2 - 37x + 27 = 0$; 2) $x^2 - 210x = 0$; 3) $-y^2 + y = 0$;
4) $x^2 + 41x - 371 = 0$; 5) $y^2 - 19 = 0$; 6) $3x^2 - 10 = 0$.

2.63. Найдите корни уравнения с помощью теоремы, обратной теореме Виета:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 4x + 3 = 0$; 3) $x^2 - 16x + 48 = 0$;
4) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 5) $x^2 + 3x - 4 = 0$; 6) $x^2 + 12x + 27 = 0$.

5) ▲ Т. к. $p = 3$, $q = -4$, то нужно найти числа u и v так, чтобы выполнялись равенства $u + v = -3$ и $u \cdot v = -4$. Поскольку при $u = 1$, $v = -4$ верны равенства $1 + (-4) = -3$ и $1 \cdot (-4) = -4$, то по теореме Виета $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. ■

2.64. Найдите корни уравнения (устно):

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 2) $x^2 - \left(\sqrt{2} + 1\right)x + \sqrt{2} = 0$;
3) $x^2 - 7ax + 12a^2 = 0$; 4) $x^2 + 2x - 24 = 0$;
5) $x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$; 6) $x^2 + 5bx + 6b^2 = 0$.

2.65. С помощью заданных корней составьте квадратное уравнение:

1) -7 и -2; 2) $-3{,}4$ и 6; 3) $\frac{4}{3}$ и 2; 4) 8 и -3;

4) ▲ Корнями искомого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ являются числа $x_1 = 8$, $x_2 = -3$. Тогда по теореме Виета имеем: $-p = x_1 + x_2 = 8 - 3 = 5$ и $q = x_1 \cdot x_2 = 8 \cdot (-3) = -24$, т. е. $p = -5$, $q = -24$.
Ответ: $x^2 - 5x - 24 = 0$. ■

5) $\frac{4}{7}$ и $\frac{4}{7}$; 6) $-\frac{8}{3}$ и $-\frac{8}{3}$; 7) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$;
8) $3 - \sqrt{5}$ и $3 + \sqrt{5}$; 9) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{2}$.

2.66. Решите уравнение и сделайте проверку с помощью теоремы Виета:

1) $x^2 - 37x + 27 = 0$; 2) $x^2 - 2x - 9 = 0$;
3) $2x^2 + 7x + 6 = 0$; 4) $3x^2 - 4x - 4 = 0$.

2.67. Найдите корни уравнения с помощью теоремы 3:

1) $3x^2 - 13x + 10 = 0$; 2) $5x^2 + 12x + 7 = 0$;

3) $5x^2 - \left(5 + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{3} = 0$; 4) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$;

5) $7x^2 - 3x - 4 = 0$; 6) $9x^2 + \left(9 - \sqrt{2}\right)x - \sqrt{2} = 0$.

2.68. Составьте квадратное уравнение с помощью корней:

1) 2; 7; 2) –1; 4; 3) –3; –4; 4) 0; 6; 5) –5; 5;

6) 9; 7) $2 \pm \sqrt{3}$; 8) $5 \pm \sqrt{2}$; 9) $\pm\sqrt{5}$; 10) 0.

B

2.69. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами так, чтобы один из его корней был равен:

1) $-\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $2 - \sqrt{5}$; 4) $3 + \sqrt{3}$.

2.70. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a + b = 2, \\ ab = -48; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y + z = -5, \\ yz = 6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} m + n = -3, \\ mn = -18; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u + v = 15, \\ uv = 56. \end{cases}$

2.71. Не определяя корней x_1, x_2 уравнения $x^2 + 8x - 1 = 0$, найдите значение выражения:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $x_1 x_2^3 + x_2 x_1^3$;

3) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 4) $x_1^4 + x_2^4$.

1) ▲По теореме Виета необходимо, чтобы $x_1 + x_2 = -8$, $x_1 \cdot x_2 = -1$. Отсюда $(-8)^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_{11} \cdot x_2 =$ $= x_1^2 + x_2^2 - 2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 64 + 2 = 66$. Ответ: $x_1^2 + x_2^2 = 66$.■

2.72. u и v – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Выразите сумму: 1) $u^4 + v^4$; 2) $u^6 + v^6$ через a, b и c.

2.73. Найдите r в уравнении $x^2 - 4rx + 7r^2 = 0$ так, чтобы его корни удовлетворяли условию $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

2.74. Найдите сумму $x_1^7 x_2^2 + x_1^2 x_2^7$, если x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2 - 5x - 6 = 0$.

2.75. 1) Найдите коэффициенты p и q, если u и v – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, а суммы $u + 1$ и $v + 1$ – корни уравнения $x^2 - p^2x + pq = 0$.

2) u и v – корни уравнения $x^2 - 8x + 12 = 0$. Напишите квадратное уравнение, если его корни равны $\frac{1}{u^3}$ и $\frac{1}{v^3}$.

> 2) ▲ Достаточно сумму $\frac{1}{u^3} + \frac{1}{v^3}$ выразить через $u + v$ и $u \cdot v$. ■

2.76. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + p = 0$ равна 16. Найдите значение p.

2.77. При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2 + 2a(x - 1) + 1 = 0$ равна сумме квадратов этих корней?

2.78. При каких значениях m один из корней уравнения:
1) $x^2 - 2mx + m = 0$ равен $a - b$;
2) $z^2 + mz - 18 = 0$ равен -3;
3) $mx^2 - 15x - 7 = 0$ равен -7;
4) $y^2 + my + a^2 + 5a + 6 = 0$ равен $a+3$?

2.79. При каких значениях a отношение корней уравнения $3x^2 + 2x - a = 0$ равно $2 : 3$?

C

2.80. Корни уравнения $3x^2 + 2x + k = 0$ равны a и c. Найдите коэффициент k такой, чтобы: 1) $a - c = 6$; 2) $3a - c = 4$; 3) $a^2 + c^2 = 34$; 4) $a : c = -2 : 5$.

2.81. Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны m и n. Составьте квадратное уравнение с корнями $(m + n)^2$ и $(m - n)^2$.

2.82. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $x^2 - 3|x| + 1 = 0$.

> ▲ Данное уравнение можно записать так: $|x|^2 - 3|x| + 1 = 0$. Если m и n – корни уравнения $t^2 - 3t + 1 = 0$, то числа $\pm m$ и $\pm n$ являются корнями исходного уравнения, где $m > 0$, $n > 0$. Поэтому нужно определить значение выражения $m^2 + n^2 + (-m)^2 + (-n)^2 = 2(m^2 + n^2)$. ■

2.83. При каких значениях a один из корней уравнения $(a^2 - 5a + 3)\times$ $\times x^2 + (3a - 1)x + 2 = 0$ в 2 раза больше другого?

2.84. При каких значениях k сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - k)x - k - 3 = 0$ принимает наименьшее значение?

2.85. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ равны $2p$ и $\frac{q}{2}$. Найдите p и q.

2.86. Найдите коэффициенты уравнения $x^2 + px + q = 0$, такие, чтобы его корни были равны p и q.

2.87*. Корни уравнения $x^2 - 13x + b = 0$ равны квадратам соответствующих корней уравнения $x^2 + ax + b = 0$. Найдите a и b и корни каждого из данных уравнений.

2.88*. Не решая уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$, найдите разность квадратов его корней.

Упражнения для повторения

2.89. Докажите тождество:

1) $\frac{37}{7+2\sqrt{3}} + \frac{37}{7-2\sqrt{3}} = 14$; 2) $\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3} + \frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+3} = 38$.

2.90. Определите знак выражения:

1) $\frac{5a^2b}{a^2+b^2}$, если $a > 0$, $b < 0$; 2) $\frac{2a^3b^2}{a+b}$, если $a < 0$, $b < 0$.

2.91. Для чисел a, b, c и d верно равенство $a + 3 = b - 4 = c + 5 = d - 6$. Укажите наибольшее и наименьшее из этих чисел.

2.4. СВОЙСТВА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследование корней квадратного уравнения

Итак, про корни квадратного уравнения мы знаем из нижеследующей таблицы.

Знак дискриминанта	$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Действительные корни уравнения	$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	Нет корней

Кроме этого, не решая квадратное уравнение, по виду его коэффициентов можно узнать определенную информацию о его корнях. Сначала рассмотрим приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, $(p \neq 0, q \neq 0)$.

1. Если $q < 0$, тогда $D = p - 4q > 0$, (т. к. $(-4q) > 0$), т. е. квадратное уравнение имеет два действительных корня. Т. к. $x_1 \cdot x_2 = q < 0$, то знаки этих корней противоположные.

$$x^2 + 3x - 10 = 0,$$
$$p = 3,\ q = -10,\ D = 49 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -5.$$

2. Если $q = 0$, то уравнение записывается так: $x^2 + px = 0$ и $x_1 = 0$, $x_2 = -p$, т. е. один из корней уравнения равен нулю.

$$x^2 - 5x = 0,$$
$$p = -5,\ q = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 5.$$

3. Если $q > 0$, то уравнение только при $D \geqslant 0$ имеет действительные корни и $x_1 \cdot x_2 = q > 0$, поэтому эти корни имеют одинаковые знаки.

а) Пусть $p > 0$, то $x_1 + x_2 = -p < 0$, т. е. оба корня отрицательные.

$$x^2 + 4x + 3 = 0,$$
$$p = 4 > 0,\ q = 3 > 0,$$
$$D = 4 > 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3.$$

б) Пусть $p < 0$, то $x_1 + x_2 = -p > 0$, т. е. уравнение имеет два положительных корня.

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$
$$p = -4 < 0,\ q = 3 > 0,$$
$$D = 4 > 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Общий случай:

$ax^2 + bx + c = 0$, $(a > 0) \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Обозначим $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$. Тогда знаки p и q такие же, как знаки b и c соответственно (т. к. $a > 0$). На основании информации, данной выше, получим нижеследующее правило.

$ax^2 + bx + c = 0,\ (a > 0)$		
$c < 0$	$c > 0,\ b > 0,\ D \geqslant 0$	$c > 0,\ b < 0,\ D \geqslant 0$
Уравнение имеет два корня с противоположными знаками	Уравнение имеет два отрицательных корня	Уравнение имеет два положительных корня

Разложение квадратного трехчлена на множители

Определение. Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ также называются и корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Разложим квадратный трехчлен $x^2 + px + c$ на множители.

▲ Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + c = 0$. Тогда $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Поэтому $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1) = (x - x_1)\,(x - x_2)$. Итак, $x^2 + px + q = (x - x_1) \times (x - x_2)$. ■

Пример 1. Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 7x + 12$ на множители.
▲ $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ – его корни. Тогда $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)\,(x - 4)$. ■

Общий случай: $ax^2 + bx + c$.

▲ Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет такие же корни, что и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ или уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. *Если x_1 и x_2 есть корни этого трехчлена, то, как было показано выше, верно равенство* $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$. Поэтому

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2).$$

Таким образом, *если x_1 и x_2 являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то верно равенство* $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. ■

Пример 2. Разложим квадратный трехчлен $2x^2 - x - 6$ на множители.

▲ Так как $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 2$ – корни данного квадратного трехчлена, то $2x^2 - x - 6 = 2(x - (-1{,}5))(x - 2) = 2(x + 1{,}5)(x - 2) = (2x + 3)(x - 2)$. ■

Материалы из истории

Решение задач, приводимых к квадратным уравнениям, рассматривалось еще древними вавилонянами. Сохранились рукописи, свидетельствующие о том, что в XX веке до нашей эры они могли решать неполные квадратные уравнения. Древние греческие математики также могли решать некоторые квадратные уравнения методом геометрических построений. Так, Диофант Александрийский (III в.) указал на геометрический способ решения уравнений вида $ax = b$ и $ax^2 = b$. В VII веке индийский ученый Брахмагупта изложил способы нахождения

Аль-Хорезми
(787–850 гг.)

решений уравнений вида $ax^2 + bx = c$, а великий ученый Средней Азии аль-Хорезми (XII в.) в своем знаменитом труде «Китаб аль-джебр валь-мукабала» дал словесное описание формул $\left(x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$ для решения квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Позже, в 1591 году, французский математик Ф. Виет предложил способы решения квадратных уравнений общего вида и указал зависимость их корней от коэффициентов. Однако он рассматривал только положительные корни. Впервые отрицательные корни квадратных уравнений начали учитывать итальянские математики Н. Тарталья (1499–1557), Д. Кардано (1501–1576), Р. Бомбелли (1530–1572).

1. Какими должны быть коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, чтобы оно имело:
а) два корня с противоположными знаками; б) два отрицательных корня; в) два положительных корня?
2. Напишите формулу разложения на множители квадратного трехчлена и докажите ее.

Практическая работа

Составьте текстовую задачу, математическая модель которой задается уравнением $\frac{9}{x-2} + \frac{7}{x+2} = \frac{10}{x}$.

Упражнения

А

2.92. Не решая уравнения, определите знаки его корней:

1) $x^2+7x-1=0$; 2) $x^2-7x+1=0$; 3) $5x^2+17x+16=0$;
4) $x^2-18x+17=0$; 5) $x^2-2x-1=0$; 6) $x^2-15x+56=0$;
7) $19x^2-23x+5=0$; 8) $2x^2+5x+6=0$; 9) $11x^2-9x-0{,}02=0$;
10) $5x^2-x-108=0$; 11) $x^2-2{,}7x+1=0$; 12) $3x^2-12x-7=0$.

2.93. Имеет ли корни уравнение $ax^2 + abx - b = 0$, если $a > 0$ и $b > 0$?

2.94. При каких значениях a корни уравнения $x^2 + 6x + a = 0$ равны между собой?

2.95. Имеет ли уравнение $bx^2-2ax+b=0$ действительные корни, если $|a|<|b|$?

2.96. При каких значениях c уравнение $2x^2-4x+c=0$ имеет два различных положительных корня?

▲ Для того чтобы уравнение имело 2 положительных корня, необходимо, чтобы имела место система неравенств $\begin{cases} x>0, \\ D=4-2c>0 \end{cases} \Rightarrow 0<c<2.$
Ответ: $0<c<2$. ■

2.97. Разложите квадратный трехчлен на множители:

1) $x^2-2x-48$; 2) $2x^2-5x+3$; 3) $3x^2-10x+3$;
4) $5x^2-x-42$; 5) $3x^2-8x+5$; 6) $36x^2-12x+1$;
7) $2x^2-7x+6$; 8) $x^2+9x-22$; 9) $x^2-8x-84$;
10) $4x^2-11x+7$; 11) $5x^2+9x+4$; 12) $2x^2-7x+5$.

2) ▲ $x_1=1$, $x_2=1{,}5$ есть корни уравнения $2x^2-5x+3=0$. Поэтому $2x^2-5x+3=2(x-1{,}5)(x-1)=(2x-3)(x-1)$. ■

B

2.98. При каких значениях c уравнение $5x^2-4x+c=0$: 1) имеет различные корни; 2) имеет два равных корня; 3) не имеет корней; 4) имеет один общий корень с уравнением $x^2+13x-30=0$?

2.99. При каких значениях b уравнение $x^2+bx+4=0$: 1) имеет два корня, один из которых равен 3; 2) имеет два разных корня; 3) имеет два равных корня; 4) не имеет действительных корней?

2.100. Разложите квадратный трехчлен на множители:

1) $4x^2+7x+3$; 2) x^2+x-56; 3) x^2-x-56;
4) $5x^2-18x+16$; 5) $8x^2+x-75$; 6) $3x^2-11x-14$;
7) $3x^2+11x-34$; 8) x^2-x-1; 9) $4y^2-7y+1$.

2.101. Разложите квадратный трехчлен на множители:

1) $ax^2-(a+c)x+c$; 2) $6x^2+5mx+m^2$;
3) $56y^2+ay-a^2$; 4) $(m-n)x^2-nx-m$.

C

2.102. При каких значениях a корни уравнения $(a+2)x^2+2(a+2)\times x+2=0$ равны между собой?

2.103*. При каких значениях a количество корней уравнения $(a^2-6a+8)\times x^2+(a^2-4)x+(10-3a-a^2)=0$ больше, чем 2?

▲ *Указание*. Воспользуйтесь тем, что если количество корней квадратного уравнения более, чем 2, то оно имеет бесконечно много корней. ■

2.104. При каких значениях a корни уравнения $4x^2+(3a^2-5|a|+2)x-3=0$ равны по модулю, а их знаки противоположны?

2.105. Найдите целое наименьшее значение k такое, чтобы уравнение $x^2+x+k=0$ не имело действительных корней.

2.106. При каких значениях a уравнения имеют хотя бы один общий корень: 1) $2x^2+x-a=0$ и $2x^2-7x+6=0$; 2) $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$?

2.107. При каких значениях a уравнения $x^2+2(a-3)x+(a^2-7a+12)=0$ и $x^2+(a^2-5a+6)x=0$ равносильны?

2.108. При каких значениях a, b и c уравнение $0{,}75x^2+(a+b+c)\times x+a^2+b^2+c^2=0$ имеет один корень? Может ли это уравнение иметь два различных корня?

2.109. При каких значениях a корни уравнения:

1) $4x^2+ax+9=0$; 2) $ax^2+4x+1=0$;

3) $x^2-2(1-3a)x+7(3+2a)=0$ равны между собой?

Упражнения для повторения

2.110. Решите уравнение:

1) $(2x-1)^2=2x-1$; 2) $(x-3)^2=4(x-3)$;

3) $4(x-3)^2=(2x+6)^2$; 4) $(3x+4)^2=3(x+4)$.

2.111. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x - y = -8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y = 2, \\ 2x + y = 13. \end{cases}$

2.112. По заданным корням составьте уравнение и запишите его в виде многочлена:

1) -3; 8; 2) 0; 12; 3) 5; -5; 4) 1; 2; 3; 5) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2.5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Решение уравнений вида $|ax^2 + bx| + c = 0$ и $ax^2 + b|x| + c = 0$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решим уравнение $|2x^2 + 5x| - 3 = 0$.

▲ Данное уравнение запишем в виде $|2x^2 + 5x| = 3$. Модуль выражения $2x^2 + 5x$ равен 3, поэтому $2x^2 + 5x = \pm 3$, т.е. исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 5x = 3, \\ 2x^2 + 5x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 5x - 3 = 0, \\ 2x^2 + 5x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0{,}5, \quad x_2 = -3; \\ x_3 = -1, \quad x_4 = -1{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: $0{,}5$; -1; $-1{,}5$; -3. ■

Пример 2. Решим уравнение $|3x^2 - 7x| + 4 = 0$.

▲ Запишем это уравнение в виде $|3x^2 - 7x| = -4$. Здесь $-4 < 0$, а $|3x^2 - 7x| \geqslant 0$, поэтому данное уравнение не имеет решения.

Ответ: $\varnothing$. ■

Пример 3. Решим уравнение $3x^2 - 5|x| + 2 = 0$.

▲ $3x^2 - 5|x| + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 5x + 2 = 0, \; x \geqslant 0, \\ 3x^2 + 5x + 2 = 0, \; x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{3}; \\ x_3 = -1, \quad x_4 = -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Ответ: ± 1; $\pm\frac{2}{3}$. ■

Решение биквадратных уравнений

Биквадратное уравнение	Обозначение	Сведение к квадратному уравнению	Определение корней биквадратного уравнения
$ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$	$x^2 = z$	$az^2 + bz + c = 0$, z_1, z_2 – корни этого уравнения.	Из совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2 = z_1, \\ x^2 = z_2 \end{array}\right.$ находим корни биквадратного уравнения.

Пример 1. Найдем корни уравнения $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

▲ Введя обозначение $x^2 = y$, получим квадратное уравнение $y^2 - 25y + 144 = 0$, у которого 2 корня: $y_1 = 9$, $y_2 = 16$. Тогда данное биквадратное уравнение имеет 4 корня: $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 4$. ■

Решение уравнений способом введения новой переменной

Аналогично, вводя новые переменные, можно решить и другие уравнения высшего порядка. Рассмотрим примеры.

Пример 2. Решим уравнение $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

▲ Запишем данное уравнение в виде $(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0$ и введем обозначение $x^2 + x + 1 = y$. Тогда данное уравнение заменяется квадратным уравнением $y^2 - 3y + 2 = 0$. Так как $y_1 = 1$ и $y_2 = 2$ – корни этого уравнения, то получим уравнения $x^2 + x + 1 = 1$ и $x^2 + x + 1 = 2$, или $x^2 + x = 0$ и $x^2 + x - 1 = 0$. Отсюда корнями уравнения $x^2 + x = 0$ являются числа $0, -1$, а корнями уравнения $x^2 + x - 1 = 0$ – числа $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. ■

Пример 3. Решим уравнение $16x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 9$.

▲ Так как $x(x + 3) = x^2 + 3x$ и $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$, то, введя обозначение $x^2 + 3x = y$, исходное уравнение можно записать в виде $16y(y + 2) = 9$, или $16y^2 + 32y - 9 = 0$. Его корни: $y_1 = -\dfrac{9}{4}$, $y_2 = \dfrac{1}{4}$. Тогда корни исходного уравнения находятся решением уравнений $x^2+3x=-\frac{9}{4}$ и $x^2+3x=\frac{1}{4}$ или $4x^2+12x+9=0$ и $4x^2+12x-1=0$. Отсюда корнями первого уравнения являются $x_1=x_2=-1{,}5$, а второго уравнения – $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$.

Ответ: $x_{1,2}=-1{,}5$, $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$. ■

1) Как решаются уравнения вида $|ax^2+bx|+c=0$? Почему при $c>0$ данное уравнение не имеет решения? Приведите пример.
2) Как решаются уравнения вида $ax^2+b|x|+c=0$? Всегда ли это уравнение имеет корни? Поясните ответ на примерах.
3) Какие уравнения называются биквадратными? Как решаются эти уравнения?
4) Приведите примеры уравнений, которые сводятся к квадратным уравнениям методом замены переменных.

Упражнения

А

2.113. Решите уравнение:

1) $|x^2-3x|=2$; 2) $|x^2-3x|=-2$; 3) $|x^2-3x|=0$;
4) $|3x^2+7x|=4$; 5) $|2x^2-7x|-5=0$; 6) $|2x^2-7x|+5=0$.

2.114. Решите уравнение:

1) $x^2+7|x|+10=0$; 2) $x^2-29|x|+30=0$; 3) $x^2-11|x|+30=0$;
4) $x^2-5|x|+4=0$; 5) $2x^2+5|x|+3=0$; 6) $2x^2-5|x|-7=0$.

2.115. Решите уравнение:

1) $|x^2+x|-2=0$; 2) $x^2-2|x|=15$; 3) $2x^2-3|x|=2$;
4) $|x^2+5x|=-8$; 5) $2x^2+|x|=1$; 6) $|7x^2-x|+1=0$.

2.116. Решите уравнение:

1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-8x^2-9=0$; 3) $x^4-11x^2+30=0$;
4) $x^4+5x^2+10=0$; 5) $2x^4-5x^2+3=0$; 6) $9x^4+23x^2-12=0$.

2.117. Найдите корни биквадратного уравнения:

1) $x^4 - 29x^2 - 30 = 0$; 2) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$; 3) $5y^4 + 2y^2 - 3 = 0$;
4) $2y^4 - 5y^2 - 7 = 0$; 5) $x^4 - (a^2 + 9)x^2 + 9a^2 = 0$;
6) $x^4 - (9a^2 + 4)x^2 + 36a^2 = 0$.

B

2.118. Решите уравнение:

1) $|x^2 - 3x| + x^2 = 6 - (x - 2)(x + 2)$;
2) $x^2 - 3|x| - 5 = 10 - 5|x|$;
3) $3x^2 - |x| = 2|x| + (x - 1)(x + 1) + 2$;
4) $|x^2 + 5x| - x^2 = (x + 2)(2 - x) - 5$;
5) $|x^2 - x - 3| - 5 = 0$;
6) $|x^2 - 2x + 4| = 2|x|$.

2.119. Решите уравнение:

1) $(x+3)^4 - 13(x+3)^2 + 36 = 0$;
2) $(2x-1)^4 - (2x-1)^2 - 12 = 0$;
3) $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$;
4) $(x+2)^4 + 2x^2 + 8x - 16 = 0$.

2.120. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x-2}{x^3} = 2x - x^2$;
2) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 3x}$;
3) $\dfrac{8x - 4x^2}{1 - x^2} = \dfrac{x^3 - 4x}{x + 1}$;
4) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3} = \dfrac{2x + 4}{x^2 - 3x}$.

2.121. Решите уравнение:

1) $(x + 1)^2(x^2 + 2x) = 12$;
2) $(x - 2)^2(x^2 - 4x) + 3 = 0$;
3) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
4) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$.

2.122. Решите уравнение:

1) $(x^2 - 2x - 1)^2 + 3x^2 - 6x - 13 = 0$;
2) $(2x^2 - x + 5)^2 + 3(2x^2 - x - 1) - 10 = 0$;
3) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$;
4) $(x - 1)\,x\,(x + 1)(x + 2) = 24$;
5) $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$;
6) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120$.

C

2.123. Решите уравнение:

1) $|x^2 + 5x| = 6x$;
2) $|x^2 - 4x + 5| = -4x$;
3) $x^2 - 6x + 3|x - 3| + 5 = 0$;
4) $|x^2 + x + 2| = x - 3$.

2.124. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=\dfrac{16x-12}{2x-x^2}$; 2) $\dfrac{x^2+4x}{7x-2}-\dfrac{12-42x}{x^2+4x}=7$;

3) $\left(\dfrac{4x-5}{3x+2}\right)^2+\left(\dfrac{3x+2}{5-4x}\right)^2=4,25$; 4) $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\dfrac{82}{9}$.

2.125. При каких значениях a уравнение имеет 2 равных корня:
1) $x^4+(3a+1)x^2+0{,}25=0$; 2) $x^4+(3a-1)x^2+2a+0{,}25=0$?

2.126. Составьте биквадратное уравнение так, чтобы числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ были его корнями.

Упражнения для повторения

2.127. Напишите квадратичную функцию, график которой проходит через точки $A(0;\ 4)$, $B(2;\ 0)$ и $C(4;\ 0)$ и постройте этот график.

2.128. При каких значениях n значение выражения $\dfrac{2n-3}{n}$ будет больше соответствующих значений выражения $\dfrac{1}{n+1}$?

Работа в группе

2.129. На рис. 2.2 приведены данные о производстве, спросе и запасах зерновых в мире (млн тонн). Проанализируйте эти данные и сделайте выводы.

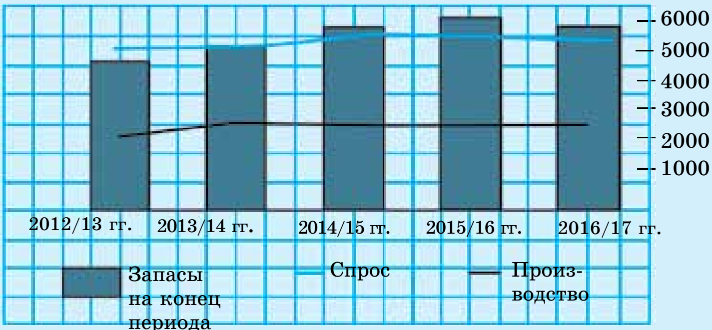


Рис. 2.2

2.130. Докажите, что при вычитании из квадрата целого числа это же число, получится четное число.

2.6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Рациональные уравнения

Уравнение, составленное из рациональных выражений, называется **рациональным уравнением.** А рациональное уравнение, которое не содержит дробные выражения, называется **целым уравнением**. Уравнение, содержащее дробные выражения, называется **дробным уравнением.**

$3x - 2 = 2(x + 1) + 5$ – целое уравнение

$$\left.\begin{aligned} & x+\frac{1}{x}=2x-1 \\ & \frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{3}{x+1} \end{aligned}\right\} \text{дробные уравнения}$$

$\frac{1}{2}x - x^2 = 2x - \frac{4}{5}$ – целое уравнение

Пример 1. Решим уравнение $2-\frac{x-7}{x-5}=\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{1}{x}$.

▲Найдем ОДЗ уравнения. Необходимо, чтобы знаменатель дроби не был равен нулю. Поэтому

$$\begin{cases} x-5\neq 0, \\ x^2-5x\neq 0, \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 5 \end{cases} \Rightarrow \text{ОДЗ: } (-\infty;\ 0)\cup(0;\ 5)\cup(5;\ +\infty).$$

Теперь уравнение приведем к общему знаменателю:

$$\frac{2x(x-5)-x(x-7)}{x(x-5)}=\frac{x+5-(x-5)}{x(x-5)} \Rightarrow 2x(x-5)-x(x-7)=$$

$= x + 5 - (x - 5) \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 5$. Здесь $(-2) \in$ ОДЗ, $5 \notin$ ОДЗ.

Ответ: $x = -2$. ■

Итак, при решении дробных уравнений удобно придерживаться следующих правил:

а) найдем все значения переменной x, обращающие в нуль знаменатели дробей, входящих в состав уравнения, и определим ОДЗ этого уравнения;

б) умножим обе части данного уравнения на общий знаменатель входящих в него дробей; тем самым данное уравнение заменим целым уравнением;

в) найдем все корни полученного целого уравнения;

г) выберем те из найденных корней, которые принадлежат ОДЗ, и запишем ответ.

Текстовые задачи, приводимые к квадратным уравнениям

Так же, как и рациональные уравнения, многие другие задачи решаются с помощью квадратных уравнений. Рассмотрим несколько примеров подобных задач.

Пример 2. Цифра, стоящая в разряде десятков двузначного числа, на 2 больше цифры, стоящей в разряде единиц.

Если это число умножить на сумму ее цифр, то получится 900. Нужно найти это двузначное число.

▲ **1-ый этап.** Сначала составим математическую модель задачи. Пусть $\overline{xy} = x \cdot 10 + y$ искомое двузначное число, где x и y цифры. Тогда по условию задачи имеем $x = y + 2$ и $(10x + y)(x + y) = 900$. Т.к. $y = x - 2$, то $(11x - 2)(2x - 2) = 900 \Rightarrow 11x^2 - 13x - 448 = 0$. Это и есть математическая модель задачи.

2-ой этап. Решим математическую модель
$11x^2 - 13x - 448 = 0 \Rightarrow D = 13^2 + 4 \cdot 11 \cdot 448 = 141^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm 141}{22} \Rightarrow x_1 = -\frac{64}{11}, \quad x_2 = 7.$$

3-ий этап. По условию задачи x является цифрой (не является дробным числом). Поэтому $x = 7$ и $y = 7 - 2 = 5$. Ответ: 75 ■

Пример 3. Первый рабочий на изготовление 60 деталей затратил на 3 ч меньше, чем второй. Известно, что они, работая вместе, за один час изготавливают 30 деталей. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей?

▲ 1) Предположим, что первый рабочий за 1 ч может изготовить x деталей. Тогда второй рабочий за 1 ч изготавливает $30 - x$ деталей. Поэтому первый рабочий изготавливает 60 деталей за $\frac{60}{x}$ ч, а второй – за $\frac{60}{30-x}$ ч. Следовательно, по условию задачи должно быть $\frac{60}{30-x} - \frac{60}{x} = 3$.

Это уравнение являются математической моделью задачи.

2) Теперь нужно решить уравнение $\frac{60}{30-x} - \frac{60}{x} = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 10x - 600 = 0 \Rightarrow x_1 = 20,\ x_2 = -30.$$

3) Число -30 противоречит условию задачи (количество деталей не может быть отрицательным числом). Поэтому необходимо, чтобы это число равнялось 20, т.е. первый рабочий за 1 ч изготавливает 20 деталей, а второй $-30-20=10$ деталей. Следовательно, второй рабочий изготовит 90 деталей за 9 ч. Ответ: 9 ч. ■

Практическая работа

Геометрический способ нахождения квадратного корня. Рассмотрим хорду AB, являющуюся диаметром окружности, стягивающую дугу AB (рис. 2.2). В курсе геометрии доказывается, что отрезок CD является геометрическим средним отрезков AD и BD, т.е. верно равенство $CD=\sqrt{AD\cdot BD}$. Если предположить, что $AD=1$ и $BD=a$, то $CD=\sqrt{a}$. Применяя это свойство с помощью циркуля и линейки, постройте отрезки длиной: 1) $\sqrt{13}$ см; 2) $\sqrt{23}$ см.

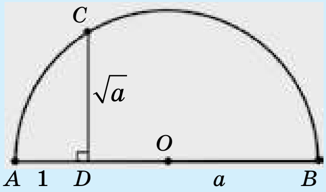


Рис. 2.3

Упражнения

А

2.131. Найдите корни уравнений:

1) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{x}{x-2}$;
2) $\dfrac{y^2-6y}{y-5}=\dfrac{5}{5-y}$;

3) $\dfrac{5y+1}{y+1}=\dfrac{y+2}{y}$;
4) $\dfrac{2y-1}{y+7}=\dfrac{3y+4}{y-1}$;

5) $\dfrac{2y+3}{2y-1}=\dfrac{y-5}{y+3}$;
6) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{5x-6}{x-2}$;

7) $\dfrac{2x^2}{x-2}=\dfrac{6-7x}{2-x}$;
8) $\dfrac{1+3y}{1-3y}=\dfrac{5-2y}{1+2y}$.

2.132. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+1}{6}+\dfrac{20}{x-1}=4$;
2) $\dfrac{12}{x-1}-\dfrac{8}{x+1}=1$;

3) $\dfrac{3}{1-x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{28}{1-x^2}$;
4) $\dfrac{x+15}{4}-\dfrac{21}{x+2}=2$;

5) $\dfrac{16}{x-3}+\dfrac{30}{1-x}=3$;
6) $\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{20}{x^2-4}$.

2.133. Найдите точки пересечения оси Ox с графиком функции:

1) $y=\dfrac{2x-5}{x+3}$; 2) $y=\dfrac{(x-4)(3x-15)}{x-9}$;

3) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $y=\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-3}$.

3) ▲ Область определения функции определяется неравенством $x\neq 2$, т. е. $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. Ордината точек, расположенных на оси Ox, равна 0. Поэтому в точке пересечения графика функции с осью Ox верно равенство $y=0$. Тогда $\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=0\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow x_1=2,\ x_2=3$. Корень $x_1=2$ не принадлежит области определения данной функции. Поэтому график функции пересекает ось Ox в точке $(3;\ 0)$. ■

2.134. Найдите точки пересечения графиков функций:

1) $y=2x+3$ и $y=\dfrac{34}{x-5}$; 2) $y=\dfrac{x^2-5x}{x+3}$ и $y=2x-35$.

2.135. При каких значениях переменной y:

1) сумма дробей $\dfrac{3y+9}{3y-1}$ и $\dfrac{2y-13}{2y+5}$ равна 2;

2) разность дробей $\dfrac{5y+13}{5y+4}$ и $\dfrac{4-6y}{3y-1}$ равна 3?

2.136. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{x-4}{x-5}+\dfrac{x-6}{x-5}=2$; 2) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}$;

3) $\dfrac{7y-3}{y-y^2}=\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{5}{y(y-1)}$; 4) $\dfrac{3}{y-2}+\dfrac{7}{y+2}=\dfrac{10}{y}$;

5) $\dfrac{30}{y^3+27}=\dfrac{2}{y+3}-\dfrac{y-5}{y^2-3y+9}$; 6) $\dfrac{3x+2}{x^3-8}=\dfrac{5}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x-2}$.

1) ▲ $x\neq 5\Rightarrow \dfrac{x-4}{x-5}\cdot(x-5)+\dfrac{x-6}{x-5}\cdot(x-5)=2(x-5)\Rightarrow x-4+$ $+x-6=2x-10\Rightarrow 2x-2x=10-10\Rightarrow 0\cdot x=0$. Это равенство верно при любых значениях x.

Ответ: $x\in(-\infty;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$. ■

2.137. Решите уравнение:

1) $\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}=2-\dfrac{x+4}{x+1}$;

2) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

3) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$;

4) $\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{12}{4-x^2}=\dfrac{1}{7}$;

5) $\dfrac{4}{x}+5=\dfrac{1}{x^2}$;

6) $\dfrac{6-y}{1-y^2}-\dfrac{y+3}{y-y^2}=\dfrac{y+5}{y+y^2}$.

B

2.138. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a+2x}=0$;

2) $1-\dfrac{2a}{x-a}=\dfrac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}$;

3) $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{2x}{x-a}=\dfrac{5a^2}{4\left(x^2-a^2\right)}$;

4) $\dfrac{2x}{x+b}-\dfrac{x}{b-x}=\dfrac{b^2}{4\left(x^2-b^2\right)}$;

5) $\dfrac{x^2}{ab-2b^2}=\dfrac{a-b}{ac^2-2bc^2}-\dfrac{x}{bc}$;

6) $\dfrac{x^2+1}{n^2x-2n}-\dfrac{1}{2-nx}=\dfrac{x}{n}$.

1) ▲Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(a+x)(a+2x)+a(a+2x)+a(a+x)}{a(a+x)(a+2x)}=0,\ \left(x\ne -a,\ x\ne -\frac{a}{2}\right)\Rightarrow (a+x)+$$

$$+(a+2x)+a(a+2x)+a(a+x)=0\Rightarrow a^2+3ax+2x^2+a^2+2ax+$$
$$+a^2+ax=0\Rightarrow 2x^2+6ax+3a^2=0.\ D=9a^2-6a^2=3a^2>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-3a-\sqrt{3}a}{2}=-\frac{3+\sqrt{3}}{2}a,\ x_2=\frac{\sqrt{3}-3}{2}a,\ x_1,x_2\in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: $x_{1,2}=-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}a$. ■

2.139. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{8}{1-4x^2}=\dfrac{3(2x-1)}{7(2x+1)}$;

2) $\dfrac{y}{y^2-9}=\dfrac{1}{y^2+3y}-\dfrac{3}{6y+2y^2}$;

3) $\dfrac{9x+12}{x^3-64}-\dfrac{1}{x^2+4x+16}=\dfrac{1}{x-4}$;

4) $\dfrac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{10x}{3x^2-2}$.

2.140. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 210 км, одновременно выехали два автомобиля. Так как скорость первого автомобиля на 5 км/ч больше скорости второго, то первый автомобиль в пункт назначения прибыл на 12 мин раньше, чем второй. Найдите скорость каждого из автомобилей.

▲ Пусть первый автомобиль имеет скорость v км/ч. Тогда скорость второго автомобиля равна $(v-5)$ км/ч. Поэтому первый автомобиль 210 км пути пройдет за $\frac{210}{v}$ ч, а второй – за $\frac{210}{v-5}$ ч. По условию задачи разность между ними равна 12 мин, т. е. $\frac{1}{5}$ ч. Тогда $\frac{210}{v-5}-\frac{210}{v}=\frac{1}{5}$. Это уравнение является математической моделью задачи. Отсюда $5 \cdot 210 = \frac{1}{5}\, v(v-5) \Rightarrow 5250 = v^2 - 5v \Rightarrow v^2 - 5v - 5250 = 0 \Rightarrow v_1 = 75,\ v_2 = -70$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Поэтому $v = 75$ км/ч.

Ответ: 75 км/ч, 70 км/ч. ■

2.141. В зрительном зале было 320 посадочных мест, с равным количеством в каждом ряду. После того как количество посадочных мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, то их количество в зале стало 420. Сколько рядов стало в зрительном зале?

2.142. За 1 ч равномерного сливания в бассейне оставалось 400 м³ воды, а еще через 3 ч в нем осталось 250 м³ воды. Найдите первоначальный объем воды в бассейне.

2.143. В круговом шахматном турнире (каждый игрок играет одну партию с каждым другим участником турнира) сыграно 78 партий. Найдите количество участников турнира.

2.144. Катер проплыл 18 км по течению реки и 20 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Найдите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде равна 20 км/ч.

2.145. Расстояние между городами A и B равно 260 км. Автобус, вышедший из города A в город B, через 2 ч был вынужден остановиться на 30 мин. Чтобы прибыть в город B по расписанию, он увеличил первоначальную скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость автобуса.

2.146. Расстояние между станциями A и B равно 120 км. Вслед за первым поездом, вышедшим из A в B, через 3 ч в этом же направлении отправился второй поезд, скорость которого на 10 км/ч больше скорости первого. Известно, что первый поезд прибыл на станцию B на 2 ч раньше, чем второй. За сколько часов пройдет путь от A до B второй поезд?

C

2.147. Известно, что лодка проплывает по озеру 25 км и 9 км против течения реки за такое же время, за которое она проплывает 56 км по течению реки. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

2.148. Из аэропорта в южном и западном направлениях одновременно вылетели два самолета. Через 2 ч расстояние между ними было 2000 км. Какова скорость каждого из этих самолетов, если скорость одного из них составляет 75% скорости другого?

2.149. Два трактора могут вспахать поле на 18 ч быстрее, чем один первый трактор, и на 32 ч быстрее, чем один второй. За сколько часов каждый трактор может вспахать все поле?

2.150. Две бригады должны были собрать весь урожай за 12 дней. Однако после 8 дней совместной работы первая бригада была переведена на другую работу, и оставшуюся часть работы вторая бригада завершила за 7 дней. За сколько дней каждая бригада в отдельности собрала бы весь урожай?

2.151. Двум рабочим было поручено изготовить партию некоторых деталей. После того как первый рабочий проработал 7 ч, а второй – 4 ч, стало известно, что выполнено $\frac{5}{9}$ части всей работы. А после того как они проработали вместе еще 4 ч, оставалось выполнить $\frac{1}{18}$ часть всей работы. За сколько часов каждый рабочий в отдельности выполнил бы всю работу?

2.152. Известно, что поезд проходит мимо телеграфного столба за 7 с, а мимо железнодорожной платформы, длина которой равна 180 м, – за 25 с. Каковы скорость и длина состава поезда?

2.153. С первого земельного участка было собрано 2880 ц урожая, а со второго участка, площадь которого на 12 га меньше, – 2160 ц. Известно, что с каждого гектара первого участка было собрано на 4 ц больше, чем с одного гектара второго участка. Найдите площадь каждого участка.

2.154. В сплаве алюминия и магния содержится 22 кг алюминия. Этот сплав переплавили, добавив к нему 15 кг магния. В новом сплаве доля магния выросла на 33%. Какова масса первоначального сплава?

2.155. Катер прошел 20 км вверх по реке и 30 км вниз, затратив на весь путь 2 ч. Какова скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде 25 км/ч?

2.156. Два тела движутся по окружности в одном направлении. Одно из них совершает полный оборот на 2 с раньше второго. Известно, что они встречаются через каждые 60 с. Какую часть окружности преодолевает каждое из них за 1 с?

2.157. Составьте задачу, решаемую уравнением:

1) $x(x-10)=24$; 2) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$.

Упражнения для повторения

2.158. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=0, \\ x+3y=5. \end{cases}$

2.159. Упростите выражение:

1) $\left(\sqrt{21}+\sqrt{14}-2\sqrt{35}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}+\sqrt{20}$; 2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{75}$.

2.160. Постройте полигон частот вариационного ряда:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	1	2	7	8	2

2.7.* РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Степенью одночлена ax^ky^p, зависящего от переменных x и y (здесь a – некоторое число, а p и k – натуральные числа), называют число, являющееся значением суммы $k + p$. Например, степень одночлена $2x^2y^3$ равна 5, степень одночлена $0{,}5xy^3$ равна 4, а степень $3x^3$ равна 3.

Степенью многочлена называют наибольшую степень одночленов, входящих в состав этого многочлена. Например, степень многочлена $2xy^2 + x^2 + 6y + 20$ равна 3, степень многочлена $2x^2y^2 + x^3 + 5y^3$ равна 4, а степень многочлена $xy + 5$ равна 2. Если в системе двух уравнений степень одного уравнения равна 2, а степень второго уравнения не больше 2, то эту систему называют системой уравнений ***второго порядка***.

Например, системы уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + xy = 4, \\ 2x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

являются системами уравнений второго порядка. Значения переменных x и y, обращающие каждое уравнение системы в числовое тождество, называют ***решением*** этой системы.

Например, система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$ имеет две пары решений:

1) $x_1 = -1$, $y_1 = -2$; 2) $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

В этом можно убедиться, подставив числа в данную систему уравнений.

$$1)\ \begin{cases} (-1)^2 + (-2)^2 = 5, \\ (-1) - (-2) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 1 = 1. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2^2 + 1^2 = 5, \\ 2 - 1 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Существует несколько способов решения системы уравнений 2-го порядка. Рассмотрим их на примерах.

Пример 1. *Метод подстановки.* Для решения достаточно из второго (линейного) уравнения выразить одно неизвестное через другое и найденное выражение подставить в первое уравнение.

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0. \end{cases}$

▲ Выразим y через x во втором уравнении:
$y = 3x - 1$, подставим его в первое уравнение. Тогда имеем: $x^2 + (3x - 1)^2 + 2(3x - 1) - 9 = 0$ или $x^2 - 1 = 0$. Последнее уравнение имеет два корня:

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Отсюда, учитывая, что $y = 3x - 1$, получим: $y_1 = -4$, $y_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -1$, $y_1 = -4$ и $x_2 = 1$, $y_2 = 2$. ■

В некоторых случаях системы уравнений решают методом *применения теоремы Виета*. Рассмотрим пример.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

▲ По теореме Виета значения x и y, удовлетворяющие данной системе, являются решениями квадратного уравнения $z^2 - 5z + 6 = 0$, корнями которого служат числа 2 и 3. Оба уравнения системы симметричны относительно x и y, поэтому данная система уравнений имеет две пары решений: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ и $x_2 = 3$, $y_2 = 2$.

Ответ: (2; 3) и (3; 2). ■

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -10. \end{cases}$$

▲ Эту систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x \cdot (-y) = 10. \end{cases}$$

Тогда значения x и $(-y)$ являются решениями уравнения $z^2 - 7z + 10 = 0$. Получаем $z_1 = 5$, $z_2 = 2$. Поэтому данная система уравнений имеет две пары решений: $x_1 = 2$, $y_1 = -5$ и $x_2 = 5$, $y_2 = -2$.

Ответ: (2; –5), (5; –2). ■

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

▲ **1-ый способ.** Умножив второе уравнение системы на 2 и сложив его с первым уравнением, получим равенство $(x + y)^2 = 36$, или $x + y = \pm 6$. Тогда исходная система уравнений разлагается на 2 системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8, \end{cases}$

каждая из которых решается как система из примера 2. Поэтому задача имеет 4 решения: (–4; –2), (–2; –4); (4; 2), (2; 4).

2-ой способ. Если ввести обозначения $x^2 = u$, $y^2 = v$, то данную систему можно записать так: $\begin{cases} u + v = 20, \\ uv = 64. \end{cases}$

Эта система имеет два решения: $u_1 = 16$, $v_1 = 4$ и $u_2 = 4$, $v_2 = 16$. Отсюда при $u = 16$ и $v = 4$ получим $x = \pm 4$, $y = \pm 2$, а при $u = 4$ и $v = 16$ получим $x = \pm 2$, $y = \pm 4$. ■

Пример 5. Решим систему $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$

▲ Умножив первое уравнение системы на 5, а второе – на 3, вычтем из первого уравнения второе. Тогда получим уравнение $x^2 + 2xy - 8y^2 = 0$. Так как $y = 0$ не является корнем исходной системы (убеждаемся проверкой), то, разделив последнее уравнение на y^2, получим: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 8 = 0$. Здесь, вводя обозначение $\frac{x}{y} = z$, получим квадратное уравнение $z^2 + 2z - 8 = 0$, корнями которого служат числа –4 и 2. Следовательно, мы получим равенства $\frac{x}{y} = -4$, $\frac{x}{y} = 2$, или $x = 4y$, $x = 2y$. Поэтому исходная система распадается на следующие две системы:

$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x = -4y \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = 2y \end{cases}$, которые решаются с помощью методов, примененных в примере 1. Данная система имеет 4 решения: $x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{7}}$, $x_{3,4} = \pm 2$, $y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$, $y_{3,4} = \pm 1$. ■

Упражнения

A

2.161. Определите степени следующих многочленов и уравнений:

1) $4xy + xy^2 - 5x^2 + y$;
2) $8x^4y + 5x^2y^3 - 11$;
3) $2xy = x^3 + y^3$;
4) $xy - x + y - 1$;
5) $xy - x + y - 1$;
6) $1 - 3x$;
7) $4x^6 + 2y^6 + x^4y^4 = 0$;
8) $5xy^2 + 6x^2y = 0$.

В упражнениях **2.162–2.173** решите системы уравнений.

2.162.

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74, \\ x - y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 34, \\ x + y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$

1) ▲ $\Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = -21, \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -3(x-y) = -21, \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4, \\ 2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -5. \end{cases}$

Ответ: $x = 2$, $y = -5$. ■

2.163.

1) $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ xy = 12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5(x-y) = 4y, \\ x^2 + 4y^2 = 181. \end{cases}$

2.164.

1) $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 5y = -64, \\ x - y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 4x - 5y - 8 = 0, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$

B

2.165.

1) $\begin{cases} 2x - 3y = -18, \\ xy = -12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -19, \\ xy = -6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65, \\ xy = 28. \end{cases}$

▲ $\Rightarrow \begin{cases} 2x + (-3y) = -18, \\ 2x(-3y) = -12 \cdot (-6) \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2x = u, \\ -3y = v \end{matrix} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} u + v = -18, \\ u \cdot v = 72. \end{cases}$ По теореме Виета u и v являются корнями уравнения

$t^2 + 18t + 72 = 0$: $t_1 = -6$, $t_2 = -12$. Тогда $u = -6$, $v = -12$ или $u = -12$, $v = -6 \Rightarrow 2x = -6$, $-3y = -12$ или $2x = -12$, $-3y = -6 \Rightarrow x = -3$, $y = 4$ или $x = -6$, $y = 2$.

Ответ: $(-3; 4)$, $(-6; 2)$. ■

2.166.

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$

2.167.

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 2, \\ \dfrac{10x + y}{xy} = 3. \end{cases}$

2.168.

1) $\begin{cases} xy = 36, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20. \end{cases}$

C

2.169.

1) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \dfrac{5}{6}xy + \dfrac{7}{8}y^2 = 18. \end{cases}$

2.170.

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy = 12, \\ xy - y^2 = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

2.171.

1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} - \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 3xy} + \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2 + 3xy} - \dfrac{1}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{14}. \end{cases}$

2.172.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y} + \dfrac{x-2y}{x+y} = 4, \\ x^2 + xy + y = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x-9y}{x+y} + \dfrac{2x+y}{x-y} = 4, \\ x^2 - y^2 = 48. \end{cases}$

2.173.

1) $\begin{cases} x + y + xy = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3y^2 - x^2y^2 = 36, \\ 2x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

2.174.* При каких значениях a система уравнений имеет только одно решение:

1) $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 2? \end{cases}$

Дополнительные упражнения к разделу 2

2.175. Решите уравнение с помощью выделения полного квадрата:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2+3x-40=0$; 3) $5x^2+3x-2=0$;
4) $4x^2-3x-22=0$; 5) $x^2+px+q=0$; 6) $ax^2+bx+c=0$.

2.176. Решите уравнение:

1) $9x^2 - 4x - 2 = 0$; 2) $7x^2 + 18x + 5 = 0$;
3) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$; 4) $x^2 + 2\left(1+\sqrt{8}\right)x + 8\sqrt{2} = 0$;
5) $x^2 - 3x - 5 - \sqrt{7} = 0$; 6) $x^2 - 13x + 4 = 0$.

2.177. Решите уравнение:

1) $(3x - 2)(x - 3) = 20$; 2) $(x + 2)(4x - 5) = -3$;
3) $\dfrac{(x-1)^2}{5} - \dfrac{x+4}{6} = \dfrac{2x-2}{3}$; 4) $\dfrac{x^2+3x}{5} = \dfrac{10-x}{2} - \dfrac{3x^2+8x}{14}$.

2.178. Решите уравнение:

1) $x^2 - cx - 2c^2 = 0$; 2) $x^2 + 5ax - 6a^2 = 0$;
3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$; 4) $(a + 1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$.

2.179. Выразите a через b:

1) $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$; 2) $21a^2 - 4ab - b^2 = 0$;

3) $\left(\frac{a+2b}{a-b}\right)^2 - 2\left(\frac{a+2b}{a-b}\right) = 3$; 4) $\frac{a-2b}{3a+b} + 3\cdot\frac{3a+b}{a-2b} = 4$.

2.180. Отношение произведения двух чисел к разности их квадратов равно 0,3. Найдите отношение этих чисел.

2.181. Сумма квадратов двух чисел в 2 раза больше неполного квадрата их разности. Найдите отношение этих чисел.

2.182. Решите уравнение:

1) $\frac{x^3}{|x|} - 7x + 12 = 0$; 2) $x|x| + 7x + 12 = 0$;

3) $|x+3| = |x^2 + x - 5|$; 4) $|3x^2 - 6x - 1| = 2|3 - x|$.

2.183. Решите уравнение:

1) $\frac{30}{x^2-1} + \frac{7-18x}{x^3+1} = \frac{13}{x^2-x+1}$;

2) $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{1-x^3}$;

3) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14} - \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1}$;

4) $\frac{2x+7}{x^2+5x-6} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x+3}$.

2.184. x_1 и x_2 являются корнями уравнения $4x^2 - 6x - 1 = 0$. Составьте квадратное уравнение с корнями, равными:

1) $x_1 - 2$, $x_2 - 2$; 2) $2x_1 + 3$, $2x_2 + 3$; 3) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$; 4) $x_1 + \frac{1}{x_2}$, $x_2 + \frac{1}{x_1}$.

2.185. 1) При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2-a)x - a - 3 = 0$ принимает наименьшее значение? 2) Найдите наибольшее целое значение a, такое, чтобы уравнение $x^2 + x - a = 0$ не имело действительных корней.

2.186. При каких значениях k уравнения $x^2 + 2(k - 3)x + (k^2 - 7k + 12) = 0$ и $x^2 - (k^2 - 5k + 6)x = 0$ равносильны?

2.187. За два года численность населения поселка выросла от 20 000 до 22 050 человек. Найдите процент годового прироста населения поселка.

2.188. По окончании школы ученики одного класса обменялись друг с другом фотографиями. Сколько учеников в классе, если фотографий всего 992?

2.189. При каких значениях переменной x:

1) сумма дробей $\frac{6}{x+1}$ и $\frac{x}{x-2}$;

2) разность дробей $\frac{x+12}{x-4}$ и $\frac{x}{x+4}$ равна их произведению?

2.190. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} |x| + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$

Раздел 3. Квадратичная функция

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- будем знать свойства и строить графики квадратичных функций вида $y = a(x - m)^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2 + n$, $a \neq 0$;
- будем знать свойства и строить график квадратичной функции вида $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$;
- будем находить значения функции по заданным значениям аргумента и находить значение аргумента по заданным значениям функции:
- будем использовать квадратичную функцию для решения прикладных задач;
- будем составлять математическую модель по условию задачи;
- будем преобразовывать график функции;
- будем строить график функции, содержащий знак модуля;
- будем строить график дробно-линейной функции;
- будем решать уравнения и системы уравнений графическим способом.

3.1. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Определение квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Функциональное соответствие, определяемое *этим равенством*, называется **квадратичной функцией.** Ее график называется параболой.

$y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$. Выделим полный квадрат квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Обозначим: $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{D}{4a}$.

$y = a(x - m)^2 + n$. Точка $A(m; n)$ называется **вершиной** квадратичной функции, а прямая $x = m$ – **осью квадратичной функции.**

Пример 1. Найти координаты вершины и ось графика квадратичной функции $y = 2x^2 - 5x + 3$.

▲ $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$, $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \Rightarrow m = \dfrac{5}{4}$, $n = -\dfrac{1}{8}$.

Поэтому данная квадратичная функция записывается в виде: $y = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$. Здесь $A\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$ является вершиной, а прямая $x - \frac{5}{4} = 0$ – осью этой функции. ■

Графики функций $y = a(x - m)^2$ и $y = ax^2 + n$

В 7 классе мы рассматривали способы построения графика функции $y = ax^2$. Например, на рис. 3.1 и 3.2 изображены графики функций $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = -\frac{1}{2}x^2$. Теперь с помощью графика функции $y = ax^2$ построим график функции $y = a(x - m)^2$ и $y = ax^2 + n$.

Точка $O(0; 0)$ является вершиной, а прямая $x = 0$ (ось Oy) – осью функции $y = ax^2$.

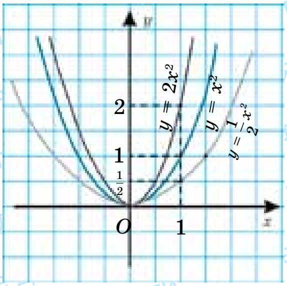


Рис. 3.1

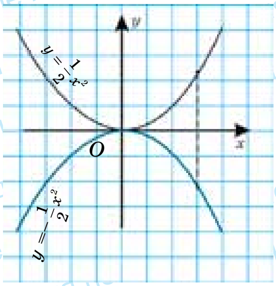


Рис. 3.2

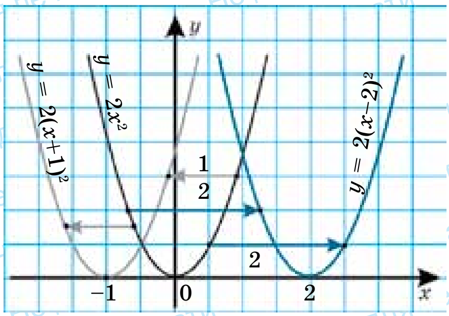


Рис. 3.3

Точка $A(m; 0)$ является вершиной, а прямая $x - m = 0$ – осью функции $y = a(x - m)^2$.

Точка $A(0; n)$ является вершиной, а прямая $x = 0$ (ось Oy) – осью функции $y = ax^2 + n$.

Поэтому, чтобы построить график функции $y = a(x - m)^2$ достаточно параллельно переместить график функции (параболу) $y = ax^2$ так, чтобы его вершина совпала с точкой $A(m; 0)$. На рис. 3.3 изображены графики функций $y = 2(x + 1)^2$, $y = 2x^2$ и $y = 2(x - 2)^2$.

Чтобы построить график функции $y = ax^2 + n$, достаточно параллельно переместить график функции $y = ax^2$ так, чтобы его вершина совпала с точкой $A(0; n)$. На рис. 3.4 изображены графики функций $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2$ и $y = 2x^2 - 2$.

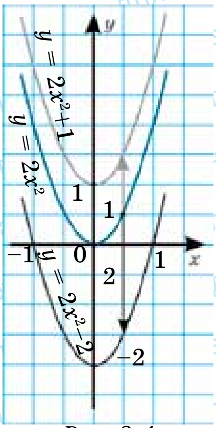


Рис. 3.4

График функции $y = a(x - m)^2 + n$

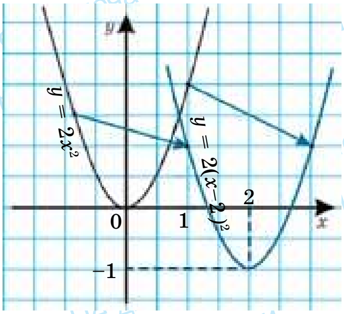


Рис. 3.5

Чтобы построить график функции $y = a(x - m)^2 + n$, достаточно параллельно переместить график функции $y = ax^2$ так, чтобы его вершина совпала с точкой $A(m;\ n)$, а ось – с прямой $x = m$. На рис. 3.5 изображен график функции $y = 2(x - 2)^2 - 1$.

В общем случае, чтобы точнее изобразить график функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, необходимо найти координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат.

Пересечение с осью Ox:

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0.$$

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет два действительных корня: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, т.е. график функции пересекает ось Ox в точках $(x_1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0)$.

Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, т.е. график функции касается оси Ox в точке $\left(-\frac{b}{2a};\ 0\right)$.

Если $D < 0$, то график функции не пересекается с осью Ox. График функции будет расположен: *а*) выше оси Ox в случае $a > 0$; *б*) ниже оси Ox в случае $a < 0$.

Пересечение с осью Oy:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = c. \end{cases}$$

График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Oy в точке $(0;\ c)$.

Итак, график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть **парабола**.

- в случае $a > 0$ ветви параболы направлены вверх;
- в случае $a < 0$ ветви параболы направлены вниз;
- прямая $x = -\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы;
- точка $A(m;\ n)$ является **вершиной параболы.** $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$ (рис. 3.6–3.11).

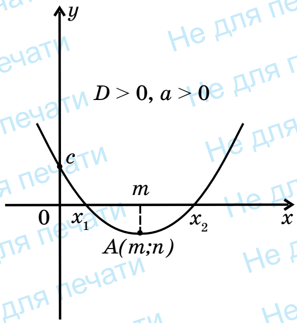


Рис. 3.6

Рис. 3.7

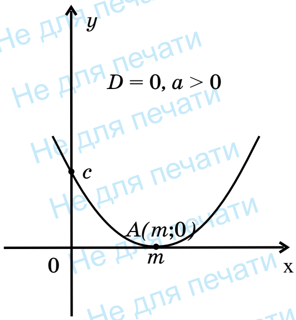


Рис. 3.8

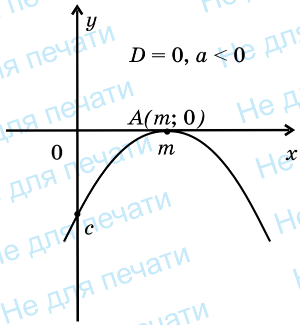


Рис. 3.9

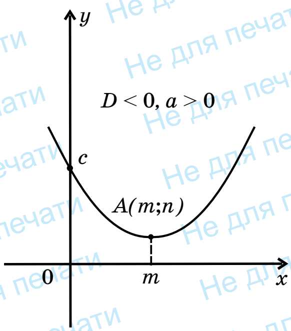


Рис. 3.10

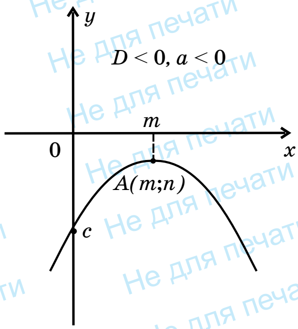


Рис. 3.11

Пример 2. Нужно построить график функции $y = x(4 - x)$.

▲$y = x(4 - x) = 4x - x^2 = -(x - 2)^2 + 4$, здесь $a = -1 < 0$, $m = 2$, $n = 4$. Поэтому ветви параболы направлены вниз, точка $A(2;\ 4)$ является вершиной и прямая $x = 2$ – осью графика функции. $x(4 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 4$, т.е. парабола пересекает ось Ox в точках (0; 0) и (4; 0).

Если $x = 1 \Rightarrow y = 1\ (4 - 1) = 3;$
если $x = 3 \Rightarrow y = 3\ (4 - 3) = 3.$

$\Downarrow$

Парабола также проходит через точки (1; 3) и (3; 3) (рис. 3.12.) ■

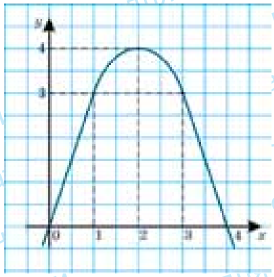


Рис. 3.12

1. Какую функцию называют квадратичной?
2. Как построить график функции $y = ax^2$ при $a \neq 1$?
3. Как расположен график функции $y = a(x - m)^2$ по сравнению с графиком функции $y = ax^2$?
4. Как строится график функции $y = a(x - m)^2 + n$?

Практическая работа

Из жесткой бумаги сделайте макет графика функции $y = x^2$. С помощью этого макета постройте график функций: 1) $y = (x - 3)^2 - 2$; 2) $y = x^2 + 4x + 3$. Найдите координаты вершины и ось параболы, а также координаты точек пересечения графика с осью абсцисс.

Упражнения

А

3.1. Проходит ли график функции $y = 3x^2 - x - 2$ через точки $A(-1; 2)$, $B(2; 8)$, $C(0; 3)$ и $D(1; 4)$?

3.2. Найдите координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции $y = -x^2 + 2x + 3$.

3.3. Найдите ординату точки, лежащей на графике функции $y = 2x^2 - x - 1$ и абсцисса которой равна: 1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1,5; 5) 2.

3.4. Существует ли точка, лежащая на графике функции $y = -x^2 + x + 2$, ордината которой равна: 1) -4; 2) $-2{,}5$; 3) 0; 4) 1; 5) 3? Если существует, то найдите ее координаты.

1) ▲ $\begin{cases} y = -4, \\ y = -x^2 + x + 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 = -x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 3$, т.е. точки $(-2; -4)$ и $(3; -4)$ лежат на графике функции. ■

3.5. Постройте график функции:
1) $y = -2x^2 + 1$; 2) $y = (x - 2)^2 + 3$;
3) $y = -2(x + 1{,}5)^2 + 1$; 4) $y = -3x^2 + 8x + 3$;
5) $y = 0{,}5x^2 - 2$; 6) $y = (x + 1)^2 - 2$.

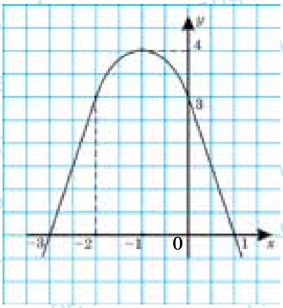


Рис. 3.13

3.6. Найдите вершину и ось параболы, заданной следующей функцией, и постройте эту параболу:
1) $y = 3(x - 2)^2 - 2$; 2) $y = 3 - 2x - x^2$;
3) $y = x^2 + 12x + 22$; 4) $y = -(x + 1)^2 + 3$;
5) $y = 2x^2 - 2x - 4$; 6) $y = x(1 - x)$.

2) ▲ $y = 3 - 2x - x^2 = 4 - (1 + 2x + x^2) = -(x + 1)^2 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow A(-1; 4)$ – вершина, $x = -1$ – ось параболы (рис. 3.13). ■

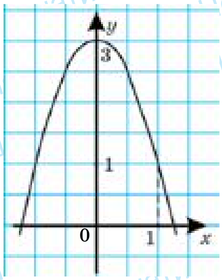


Рис. 3.14

B

3.7. Постройте график функции:
1) $y = 3x(x + 2)$; 2) $y = (3 - x)(x - 4)$;
3) $5y = (x^2 - 4)^2 - (x^2 + 1)^2$; 4) $y = (x - 1)^2 - 4(x - 1) + 3$.

3) ▲ $5y = (x^2 - 4)^2 - (x + 1)^2 = x^4 - 8x^2 + 16 - x^4 - 2x^2 - 1 = -10x^2 + 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5y = -10x^2 + 15 \Rightarrow y = -2x^2 + 3$ (рис. 3.14) ■

3.8. На рис. 3.15 построены графики функции $y = ax^2 + bx + c$ в различных вариантах. По каждому графику этого рисунка определите знаки коэффициентов a, b и c.

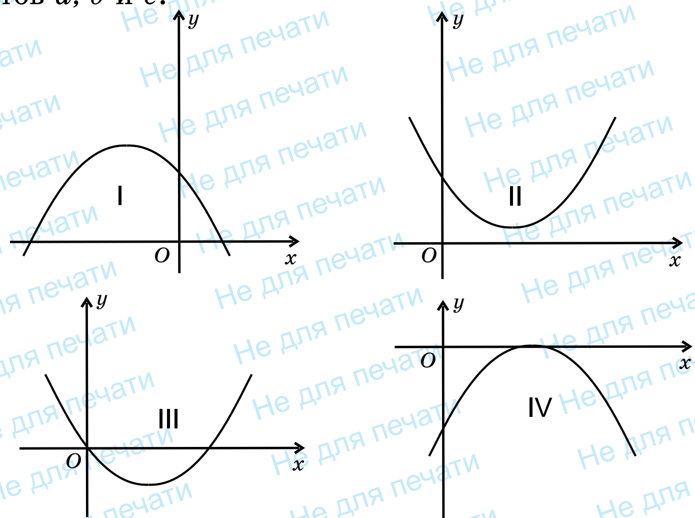


Рис. 3.15

3.9. Две из заданных точек лежат на оси Ox, а одна – на оси Oy. Существует ли парабола, проходящая через эти три точки? Будет ли она единственной, если такая парабола существует? 1) $A(-1;\ 0)$, $B(2;\ 0)$, $C(0;\ -4)$; 2) $A(3;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 3)$; 3) $A(-5;\ 0)$, $B(-1;\ 0)$, $C(0;\ -5)$.

2) ▲Если существует квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, график которой проходит через точки $A(3;\ 0)$, $B(1;\ 0)$ и $C(0;\ 3)$, то их координаты должны удовлетворять данному уравнению, т.е:

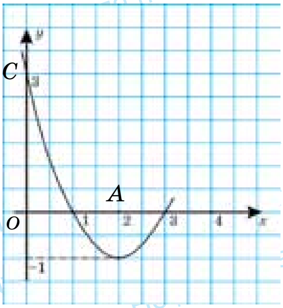


Рис. 3.16

$$\begin{cases} 0 = 9a + 3b + c, \\ 0 = a + b + c, \\ 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3, \\ 3a + b = -1, \\ a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -4,$$

$c = -3 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 3.$

График этой квадратичной функции проходит через точки A, B и C. Т.к. рассмотренная система имеет единственное решение, то найденная квадратичная функция является единственной (рис. 3.16). ■

3.10. Даны точки: 1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 3)$; 2) $A(8;\ 1)$, $B(5;\ -2)$; 3) $A(2;\ 4)$, $B(0;\ 0)$. Существует ли парабола с вершиной в точке A, проходящая через точку B? Будет ли она единственной, если такая парабола существует?

3.11. Определите все такие значения p, чтобы квадратный трехчлен $x^2 + 2px + 1$ принимал только положительные значения при любом x.

3.12. График функции $y = 2x^2 - (a + 2)x + a$ пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2, причем $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$. Определите значение a и постройте график функции.

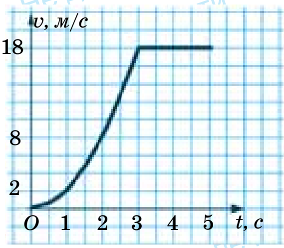


Рис. 3.17

3.13. Первые 3 с скорость автомобиля возрастает прямо пропорционально квадрату времени и далее он двигается с постоянной скоростью (рис. 3.17). По данным рис. 3.17 найдите: 1) закономерность зависимости v от времени t в первые 3 с движения;

2) найдите постоянную скорость автомобиля (в км/час), с которой он двигается по истечении 3 с.

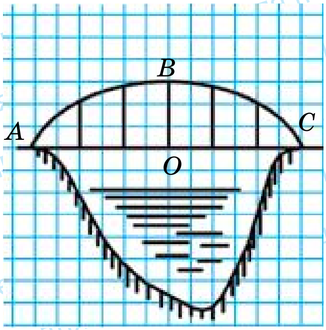


Рис. 3.18

3.14. Арка моста является дугой параболы. Эта арка через одинаковые расстояния подпирается 5 стойками, которые делят отрезок AC на 6 одинаковых отрезков (рис. 3.18). Найдите высоту других стоек, если $BO = 3$ м и $AB = 12$ м.

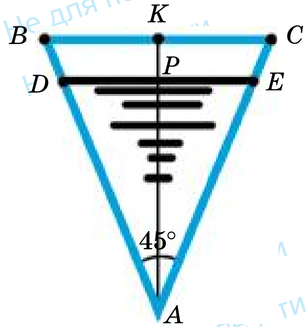


Рис. 3.19

3.15. На щитке противопожарной безопасности имеются простейшие приспособления и орудия для тушения пожара (ведро, лопата, лом и т.п.). Как правило, имеющиеся там ведра имеют конусообразную форму. На рис. 3.19 изображено осевое сечение такого ведра с водой. По данным этого рисунка: 1) выразите площадь S, части осевого сечения, заполненного водой, через $X = AD = AE$, здесь $AB = AC = 40$ см, $\angle BAC = 45^\circ$;

2) изобразите график функции $S = S(x)$ в прямоугольной системе координат;

3) найдите область определения функции $S = S(x)$ и сделайте вывод к построенному графику.

C

3.16. Постройте график функции:

1) $y = |2 - x^2|$; 2) $y = |x^2 + x - 2|$; 3) $y = 6x^2 - 7|x| + 2$;

4) $y = |3x^2 - 1|$; 5) $y = 2x^2 - 2|x| - 4$; 6) $y = 2x^2 - 5|x| - 3$.

3.17. При каких значениях p вершина параболы $y = x^2 + 4x + p$ расположена на расстоянии, равном 4 от начала координат?

3.18. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{(\sqrt{x})^2} - 1$; 2) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2}} - 1$.

3.19. При каких значениях a графики функций $y = x^2 - 7x + a$ и $y = -3x^2 + 5x - 6$ имеют только одну общую точку? Найдите координаты этой точки.

3.20. Покажите, что график функции $y = (x - a)(x - b) - c^2$ имеет, по меньшей мере, одну общую точку с осью Ox при любых значениях чисел a, b и c.

3.21*. Если найдется такое u, что $af(u) < 0$, то квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных действительных корня, причем один из корней меньше, чем u, а другой больше, чем u. Докажите.

3.22. На рис. 3.20 изображен момент толкания ядра спортсменом. Выберите прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой DC, а ось Oy – с прямой DB. Полагая, что траектория ядра является параболой и не пренебрегая сопротивлением воздуха по данным рис. 3.20: 1) напишите уравнение этой параболы; 2) полагая, что ядро вылетело с точки E, расположенной на поверхности земли, и движется по указанной параболе, найдите расстояние от E до точки C.

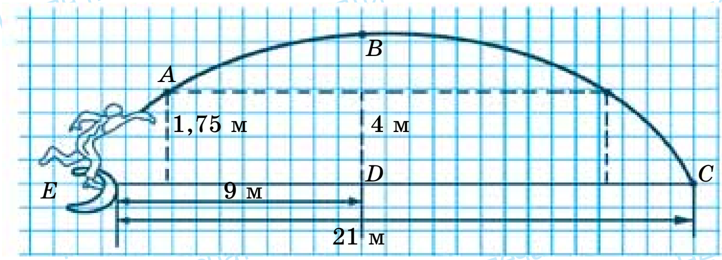


Рис. 3.20

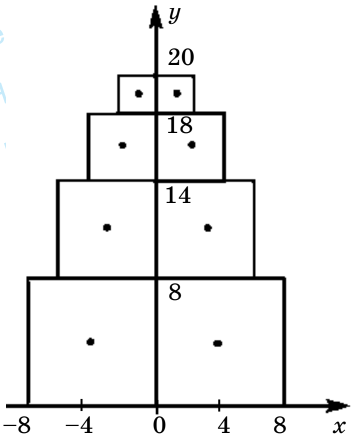


Рис. 3.21

3.23. Квадраты со сторонами 8, 6, 4 и 2 парами построены так, как показано на рисунке 3.21. Найдите координаты центров квадратов. Покажите, что эти центры лежат на параболе, и напишите уравнение этой параболы.

Если по указанному принципу продолжить построение пары квадратов ниже оси Ox, то каковы координаты следующих пар квадратов? Найдите координаты n пар квадратов.

Работа в группе

3.24. На здании торгово-развлекательного комплекса «Москва» имеется выступ в форме параболы (рис. 3.22, г. Астана).

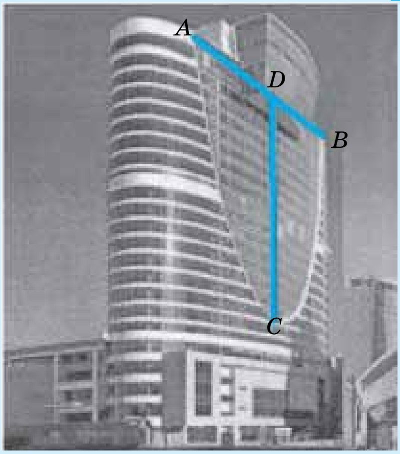


Рис. 3.22

Задания для 1-й группы. Полагая, что высота каждого этажа здания равна 3,5 м: 1) Оцените длину отрезков AB и CD; 2) Возьмите прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой AB, а ось Oy – с прямой CD. По найденным приближенным значениям AB и CD напишите уравнение указанной параболы.

Задания для 2-й группы. 1) Пользуясь возможностями ИКТ, найдите истинные значения параметров параболы и сравните их с результатами вычислений 1-й группы;

2) Найдите абсолютную и относительную погрешности приближенных значений;

3) Совместно сделайте надлежащие выводы.

Упражнения для повторения

3.25. Постройте график функции $y = \dfrac{2}{x}$ и найдите точки его пересечения с прямой $y = 2x$.

3.26. Оцените выражение: 1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $a \cdot b$; 4) $\dfrac{a}{b}$, если $3 < a < 4$ и $4 < b < 5$.

3.27. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) : \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{2ab}$; 2) $\left(x + 1 - \dfrac{1}{1 - x}\right) : \left(x - \dfrac{x^2}{x - 1}\right)$.

3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

В предыдущем пункте мы научились строить график функции $y = a(x - m)^2 + n$ с помощью графика функции $y = ax^2$. Теперь аналогично изучим способ построения графика функции $y = f(x - m) + n$ с помощью графика функции $y = f(x)$.

Построение графика функции $y = f(x) + n$ с помощью графика функции $y = f(x)$

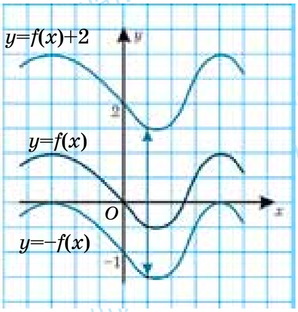


Рис. 3.23

Если построен график функции $y = f(x)$, то при $n > 0$ график функции $y = f(x) + n$ будет расположен на n единиц выше данного графика (на $|n|$ единиц ниже, если $n < 0$) (рис. 3.23).

Построение графика функции $y = f(x - m)$ с помощью графика функции $y = f(x)$

Чтобы построить график функции $y = f(x - m)$, нужно график функции $y = f(x)$ при $m > 0$ параллельно сдвинуть на m единиц вправо, а при $m < 0$ – на $|m|$ единиц влево (рис. 3.24).

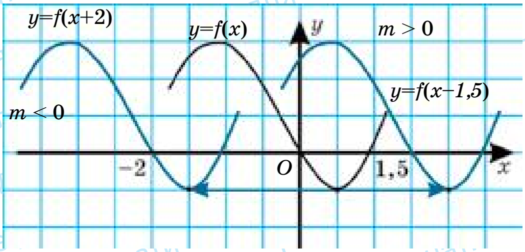


Рис. 3.24

Построение графика функции $y = f(x - m) + n$ с помощью графика функции $y = f(x)$

Чтобы построить график функции $y = f(x - m) + n$, нужно каждую точку $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = f(x)$ параллельно сдвинуть в точку $(x_0 + m;\ y_0 + n)$. На рис. 3.25 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x - 2{,}5) + 1$.

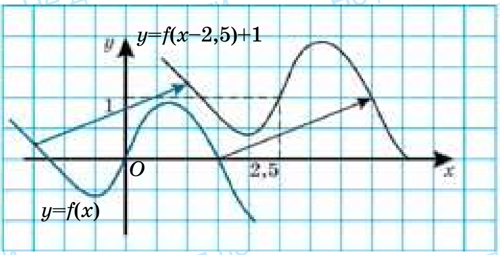


Рис. 3.25

График дробно-линейной функции

Определение.

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}, c\neq 0,\ ad-bc\neq 0.$ Это **дробно-линейная функция.**

Необходимо, чтобы $cx+d\neq 0 \Rightarrow\ x\neq -\dfrac{d}{c}$. Поэтому множество $D=\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$ является областью определения функции.

Теперь рассмотрим пример построения графика дробно-линейной функции с помощью графика обратной пропорциональности $y=\dfrac{k}{x}$.

Пример 2. Нужно построить график функции $y=\dfrac{x-1}{x+3}$.

▲ Т. к. $\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x+3-4}{x+3}=1-\dfrac{4}{x+3}$, то данную дробно-линейную функцию можно записать так: $y=-\dfrac{4}{x+3}+1$. Тогда график этой функции можно получить параллельным переносом графика функции $y=-\dfrac{4}{x}$ на 1 единицу выше вдоль оси Oy и на 3 единицы влево вдоль оси Ox (рис. 3.26).

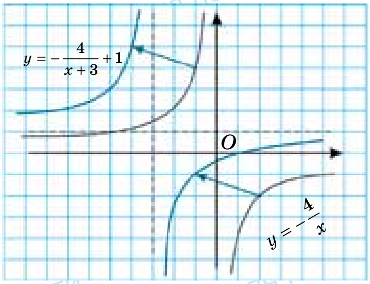


Рис. 3.26

Обратите внимание

График обратной пропорциональности, в целом график дробно-линейной функции, называют **гиперболой.**

1. Что вы понимаете под преобразованием графика функции, называемым параллельным переносом?
2. Какая функция называется дробно-линейной?
3. Как строится график дробно-линейной функции?

Практическая работа

С помощью макета графика функции $y=x^2$ или $y=\dfrac{1}{x}$ постройте график функции: 1) $y=5-(x+3)^2$; 2) $y=4x-x^2-3$; 3) $y=3-\dfrac{1}{x-2}$; 4) $y=-\dfrac{2x+1}{x+1}$.

В чем сходство и различие графиков функций, построенных по данному шаблону? Поясните это.

Упражнения

А

3.28. (Устно.) Как расположен график функции относительно графика функции $y=f(x)$:

1) $y=f(x-1)$; 2) $y=f(x+3)$; 3) $y=f(x)-2$;
4) $y=f(x)+1$; 5) $y=f(x-2)+1$; 6) $y=f(x+1)-2$;
7) $y=f(x+3)+2$; 8) $y=f(x-1)-2$; 9) $y=f(x-2)+3$?

3.29. Изготовьте твердый макет параболы $y = 0,5x^2$ и с его помощью постройте график функции:

1) $y = 0,5(x - 1)^2 + 2$; 2) $y = 0,5x^2 + 4$;
3) $y = 0,5(x + 2,5)^2 - 3$; 4) $y = 0,5(x + 4)^2$.

3.30. С помощью макета параболы $y=2x^2$ постройте график функции:

1) $y = -2x^2$; 2) $y = 2x^2 - 1$;
3) $y = -2(x - 4)^2 - 4$; 4) $y = -2(x + 3)^2$.

3.31. Определите вершину и ось параболы и схематически постройте график функции:

1) $y = 3(x - 5)^2 - 2$; 2) $y = 2x^2 - 1$;
3) $y = -2(x + 1)^2 + 3$; 4) $y = (x - 5)^2$.

3.32. Постройте график функции:

1) $y = x^2+2x-3$; 2) $y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 6$; 3) $y=-2x^2-5x-2$;
4) $y = -x^2+6x-10$; 5) $y=x^2-4x$; 6) $y=-x^2+5$.

3.33. По электрической цепи протекает ток. С помощью реостата увеличили сопротивление в цепи. Изменится ли при этом: 1) сила тока; 2) напряжение в цепи?

3.34. Вершина B треугольника ABC движется по окружности с диаметром AC. Какие элементы треугольника останутся неизменными, а какие элементы будут меняться?

3.35. Дана функция $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Найдите:

1) $f(0)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-2)$; 4) $f(a)$; 5) $f\left(\frac{1}{a}\right)$.

3.36. Дана функция $f(x) = x^3 - 10$. Найдите:
1) $f(5)$; 2) $f(4)$; 3) $f(2)$; 4) $f(-3)$; 5) $f(a-1)$.

3.37. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{x} - 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$;

3) $y = \frac{2}{x+1} + 3$ (рис. 3.27);

4) $y = 2 - \frac{2}{x-3}$.

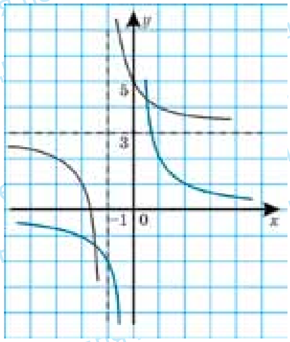


Рис. 3.27

B

3.38. Дана функция: 1) $f(x) = x(x+4)$; 2) $f(x) = \frac{x+1}{5-x}$. Найдите значения переменной x, удовлетворяющие равенству $f(x) = 0$.

3.39. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. При каких значениях a определены значения $f(a)$ и $f\left(\frac{1}{a}\right)$?

3.40. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$. При каких значениях a определены значения $f(a)$ и $f\left(\frac{1}{a}\right)$?

3.41. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{2}{\sqrt{x-4}}$; 2) $F(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$;

3) $h(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$; 4) $D(x) = \sqrt{(1-x)(1+5x)}$.

3) ▲ $\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 1].$ ■

3.42. Найдите значение суммы $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$, если $f(x)=x^2+x+1$.

3.43. Дана функция $f(x)=2x-3$. Найдите значение x, при которых: 1) $f(x)=12$; 2) $f(x)=-1$; 3) $f(x)=0$; 4) $f(x)=2a-1$.

3.44. Постройте графики функций:

1) $y=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0,\\ 0, \text{ если } x=0\\ 1, \text{ если } x>0;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-1, \text{ если } x<1,\\ x, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, \text{ если } x>1;\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x<0,\\ x^2, \text{ если } x\geqslant 0\end{cases}$ (рис. 3.28); 4) $y=\dfrac{x^3}{|x|}$.

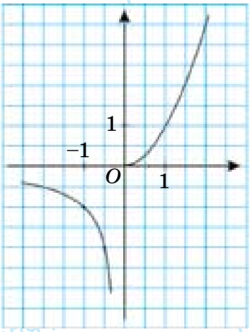


Рис. 3.28

3.45. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{2}{4x+3}$; 2) $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$;

3) $y=\dfrac{3x+1}{2x-5}$; 4) $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$.

3.46. Найдите координаты точек пересечения графика функции с осями координат (если они существуют) и промежутки, где функция принимает отрицательные и положительные значения.

1) $y=\dfrac{2x-1}{x}$; 2) $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$; 3) $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$; 4) $y=1+\dfrac{x-1}{x+1}$.

3.47. Найдите дробно-линейную функцию с асимптотами $x=3$ и $y=2$, график которой проходит через точку $A(-2;\ 3)$.

3.48. При каких значениях k график функции $y=\dfrac{2x-k}{x+2}$ проходит через точку: 1) $A(-1;\ 3)$; 2) $B(2;\ 2)$; 3) $C(-3;\ -4)$?

C

3.49*. Выразите периметр $P(x)$ заштрихованного треугольника (рис. 3.29) формулой, зависящей от ED, если $ED = x$. Здесь $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 10$ и $ED \| BC$.

3.50*. От квадрата со стороной a отсекли прямой, параллельной диагонали квадрата, часть площадью $S(x)$. Выразите $S(x)$ формулой, зависящей от расстояния x между вершиной квадрата и данной прямой (рис. 3.30).

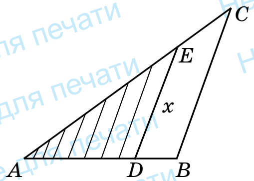


Рис. 3.29

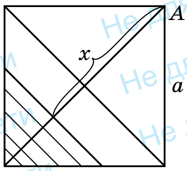


Рис. 3.30

Упражнения для повторения

3.51. Покажите, что число $11^6 - 1$ делится на 120.

3.52. Определите угловой коэффициент и график прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(4; -2)$.

Раздел 4. Элементы статистики

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- будем представлять результаты выборки в виде интервальной таблицы частот;
- будем представлять данные интервальной таблицы частот в виде гистограммы частот;
- будем знать определение накопленной частоты;
- будем анализировать информацию по статистической таблице, полигону частот, гистограмме;
- будем знать определения и формулы для вычисления дисперсии, стандартного отклонения.

4.1. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ

Случайная выборка и вариационный ряд

В 5–7 классах мы рассматривали элементы статистики. Например, статистика изучает массовые явления, описываемые какими-либо числовыми значениями.

Вы это знаете

Множество объектов (элементов), подлежащих изучению, называется **генеральной совокупностью.**

Случайно отобранная для изучения часть генеральной совокупности называется **случайной** выборкой, или **выборкой.**

Теперь на основе примера вспомним и другие понятия, изученные нами ранее.

Пример 1. В конце II четверти на внутренней суммативной контрольной работе было предложено 10 задач. По ее окончанию 25 учеников класса по количеству решенных задач показали следующие результаты: 7, 6, 7, 8, 5, 10, 10, 7, 6, 4, 5, 8, 9, 8, 7, 6, 4, 5, 10, 7, 9, 7, 6, 7, 5. Количество приведенных данных равно 25, т. е. **объем выборки** таков: $n = 25$. Наименьшее значение $x_{min} = 4$, наибольшее значение $x_{max} = 10$. Тогда $x_{max} - x_{min} = 10 - 4 = 6$ – **размах выборки.** В данной выборке встречаются только значения 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Эта цепочка значений в порядке возрастания называется **вариационным рядом,** а каждый элемент вариационного ряда – **вариантой.** Если в выборке варианта x_i встречается n_i раз, то число n_i называется **частотой,** а число $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ – **относительной частотой** варианты x_i. Подсчет частоты осуществляется следующим образом:

Варианта x_i	4	5	6	7	8	9	10
Подсчет	II	IIII	IIII	НН II	III	II	III
Частота n_i	2	4	4	7	3	2	3

По результатам этого подсчета определяется **таблица частот** вариационного ряда:

(1)

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3

Аналогично строится **таблица относительных частот** вариационного ряда:

(2)

X_i	4	5	6	7	8	9	10
W_i	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$

Данная таблица иногда называется **статистической таблицей.** Сумма статистических частот равна единице:

$$\frac{2}{25}+\frac{4}{25}+\frac{4}{25}+\frac{7}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}=1$$

Выборочное среднее значение:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\text{Сумма значений выборки}}{\text{Объем выборки}}}$$

По таблице (1) выборочное среднее значение вычисляется так:

$$\overline{X} = \frac{4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 4+7\cdot 7+8\cdot 3+9\cdot 2+10\cdot 3}{25} = \frac{173}{25} = 6,92.$$

Часто значение выборки называется ее **модой:** M_0. В данном примере $\mathrm{M}_0 = 7$.

Выпишем все выборочные элементы в порядке возрастания. Тогда:

M_e – медиана	
При n нечетном – срединный элемент выборки	При n четном – арифметическое среднее двух срединных элементов

Для подсчета медианы составляется **таблица накопленных частот** вариационного ряда:

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3
S	2	6	10	17	20	22	25

Из 25 выборочных элементов средней является 13-й элемент. Следовательно, $M_e = 7$.

Графическое представление выборки

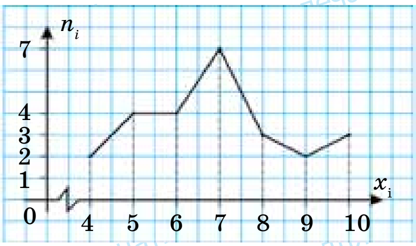


Рис. 4.1

Отложим число x_i на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат и точки $(x_i; n_i)$ соединим отрезками прямых. Таким образом, полученная фигура называется **полигоном частот выборки**. В рассмотренном примере полигон частот выборки изображен на рис. 4.1.

Замечание. При построении полигона частот масштабные единицы на осях координат бывают разными, т. к. эти числовые данные имеют разные смыслы.

Во многих случаях, особенно когда объем и размах выборки – большие числа, то полигон частот (или полигон относительных частот) не дает должного представления о законах распределения генеральной совокупности. В таких случаях рассматривают интервальный ряд частот (относительных частот).

Для того чтобы составить интервальную таблицу частот, нужно разделить отрезок, в котором расположены значения выборки, на несколько частичных интервалов длиной, равной h. Через n_i обозначим количество значений выборки, принадлежащие i-му интервалу. Если x_{i-1} и x_i – концы i-го интервала ($i = 1,2, \ldots, k$), то составляется нижеследующая таблица.

Выборочная интервальная таблица частот

Интервал Δ_i	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$\ldots$	$[x_{k-1}; x_k]$
Частота n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

$W_i = \dfrac{n_i}{n}$ – относительная частота.

Выборочная интервальная таблица относительных частот

Δ_i	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$\ldots$	$[x_{k-1}; x_k]$
W_i	$\dfrac{n_1}{n}$	$\dfrac{n_2}{n}$	$\ldots$	$\dfrac{n_k}{n}$

В задаче, рассмотренной в примере 1, интервалы целесообразно выбирать в соответствии со смыслом задачи. Например, если количество решенных учеником задач менее пяти, то ему ставится оценка «2», если он решил 5 или 6 задач, то ему ставится оценка «3», если решены 7 или 8 задач – оценка «4», а если решил 9 или 10 задач – оценка «5». Поэтому следует брать следующие интервалы: [3; 4], [5; 6], [7; 8], [9; 10]. Тогда интервальная **таблица частот** имеет вид:

Δ_i	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
n_i	2	8	10	5

Таблица относительных частот (статистическая таблица)

Δ_i	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
W_i	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{8}{25}$	$\dfrac{10}{25}$	$\dfrac{2}{25}$

Фигура, составленная из прямоугольников, ширина которых равна h, а высоты равны n_i (или w_i), называется гистограммой частот (или относительных частот).

На рис. 4.2 изображена гистограмма частот задачи из примера 1.

9–3458

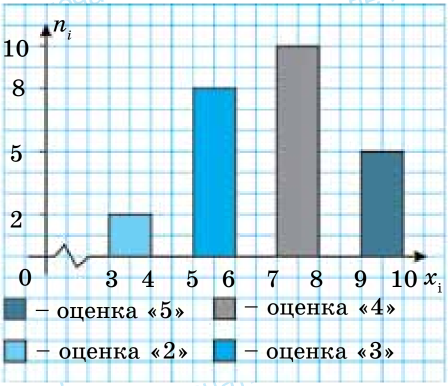


Рис. 4.2

Замечание. Если два соседних интервала имеют общий конец, то прямоугольники гистограммы «прилипают» друг к другу. При этом общий конец интервалов должен принадлежать только одному из этих интервалов.

Аналогично строится гистограмма относительных частот, при этом высоты прямоугольников равны соответствующему значению относительных частот W_i. Кроме этого, с помощью интервальной таблицы частот (относительных частот) строится полигон частот (относительных частот). Для этого нужно последовательно соединять точки (x_i*; n_i) отрезками прямых. Здесь $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ – середина интервала. Для того чтобы построить полигон частот выборки, из примера 1 нужно воспользоваться нижеследующими таблицей и рисунком 4.3.

Δ_i	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
x_i^*	3,5	5,5	7,5	9,5
n_i	2	8	10	5

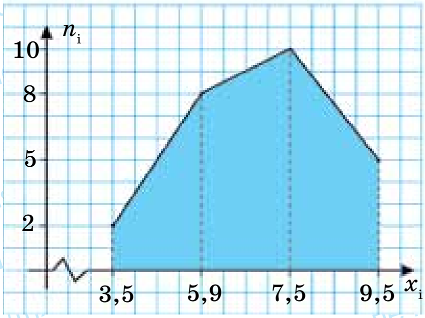


Рис. 4.3

Замечание. Аналогично строится полигон относительных частот. Для этого нужно последовательно соединять отрезками точки (x_i*; W_i).

1. Что называется генеральной совокупностью и случайной выборкой?
2. Что называется объемом и размахом выборки?
3. Как составляется вариационный ряд?
4. Что называется вариантой? Как определяется ее частота (относительная частота)?
5. Как определяется среднее значение (арифметическое среднее), мода и медиана выборки?
6. Как строится полигон частот (относительных частот) выборки?

7. Как составляется интервальная таблица частот (относительных частот)?
8. Что называется гистограммой? Как с ее помощью строится полигон частот выборки?

Практическая работа

Длиной слова называют количество букв, из которых оно состоит. Выберите какую-либо страницу любимого литературного произведения и выпишите длину всех слов из этой страницы.
1) Найдите объем и размах выборки; 2) составьте интервальную таблицу частот, полагая, что $h = 3$; 3) выбирая в качестве варианты середину интервала, составьте таблицу частот и накопленных частот вариационного ряда; 4) найдите моду, медиану и среднее значение вариационого ряда; 5) постройте гистограмму и полигон относительных частот.

Упражнения

А

По таблице частот или относительных частот случайной выборки, указанных в задачах 4.1–4.4, найдите: 1) моду и медиану; 2) арифметическое среднее значение; 3) полигон частот (относительных частот) выборки.

4.1.

x_i	1	4	7	10
n_i	1	3	2	4

4.2.

x_i	3	8	13
n_i	4	10	6

4.3.

x_i	2	3	5	6
W_i	0,2	0,3	0,1	0,4

4.4.

x_i	10	20	30	40	50
W_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

4.5. По данным, указанным в полигоне частот из рис. 4.4, найдите:

1) объем и размах; 2) составьте таблицу частот (относительных частот) и накопленных частот; 3) моду и медиану; 4) арифметическое среднее значение выборки.

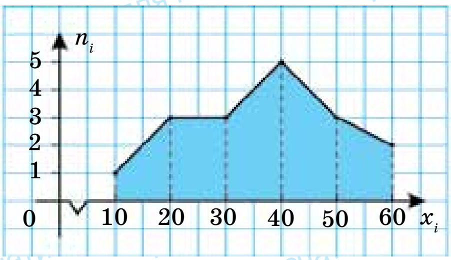


Рис. 4.4

По интервальной таблице частот (относительных частот) случайной выборки, указанных в задачах 4.6–4.9, постройте гистограмму случайной выборки.

4.6.

Δ_i	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
n_i	2	3	5

4.7.

Δ_i	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5]
n_i	10	15	20	5

4.8.

Δ_i	14–17	17–20	20–23	23–26
W_i	0,3	0,2	0,25	0,25

4.9.

Δ_i	0–2	2–4	4–6	6–8
n_i	3	6	8	3

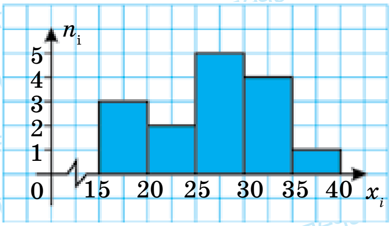


Рис. 4.5

4.10. На рис. 4.5 изображена гистограмма частот случайной выборки. Требуется составить интервальную таблицу частот и относительных частот.

В

4.11. По гистограмме на рис. 4.6: 1) укажите страны с наибольшим и наименьшим показателями ВВП; 2) полагая, что показатель США равен 100%, найдите показатели других стран в процентах; 3) найдите среднее значение ВПП указанных 7 стран. Почему найденное среднее значение нельзя принять в качестве среднего значения мирового масштаба? Объясните причину.

4.12. По данным задачи 4.6 найдите: 1) таблицу частот вариационного ряда и постройте его полигон частот; 2) составьте таблицу накопленных частот и найдите моду, медиану, среднее значение выборки.

4.13. По данным задачи 4.7 найдите: 1) таблицу частот вариационного ряда и постройте его полигон частот; 2) составьте таблицу накопленных частот и найдите моду, медиану, среднее значение выборки.

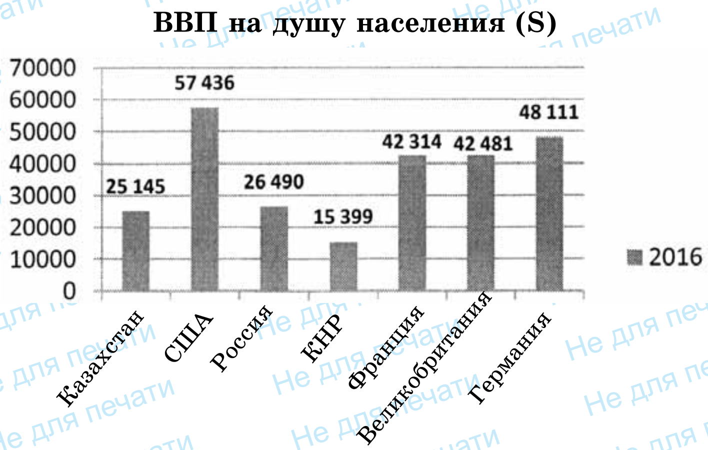


Рис. 4.6

4.14. По данным задачи 4.8 найдите: 1) таблицу относительных частот вариационного ряда и постройте его полигон относительных частот; 2) составьте таблицу накопленных относительных частот и найдите среднее значение выборки.

4.15. По данным задачи 4.9 найдите: 1) таблицу частот вариационного ряда и постройте его полигон частот; 2) составьте таблицу накопленных частот и найдите моду, медиану, среднее значение выборки.

▲ Дано:

Δ_i	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8
n_i	3	6	8	3

1) В качестве варианты вариационного ряда берут середину соответствующего интервала, а частоты остаются в указанном виде, т.е. мы получаем таблицу:

$\triangle_i$	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	Интервал
x_i^*	1	3	5	7	Середина интервала
n_i	3	6	8	3	Частота

А полигон частот строится, как правило, вместе с гистограммой так, как показано на рис. 4.7.

2) Таблица накопленных частот:

x_i^*	1	3	5	7
n_i	3	6	8	3
S	3	9	17	20

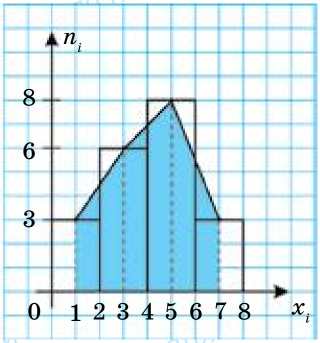


Рис. 4.7

$M_o = 5$ – мода – наиболее частое значение выборки. Т.к. объем n равен 20, то в середине выборки находится 10-й и 11-й элементы выборки: $x_{10} = 56$, $x_{11} = 5$.

Поэтому медиана такова:

$$M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5.$$

А среднее значение таково:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 3) = 3{,}15.$$ ■

4.16. При измерении некоторого признака получены следующие данные: 201,202, 204, 189, 190, 191, 194, 194, 196, 196, 198, 199, 200, 200, 200, 200, 204, 195, 205, 206, 210, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 215, 216. Постройте гистограмму частот и гистограмму относительных частот выборки.

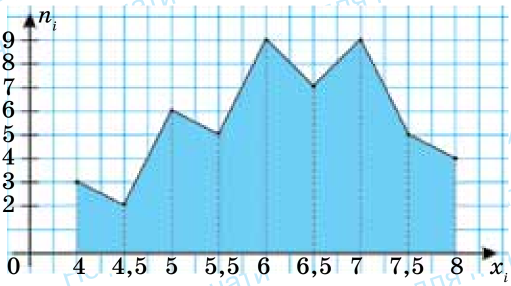


Рис. 4.8

4.17*. На рис. 4.8 построен полигон частот некоторого признака. Составьте соответствующую таблицу частот. Здесь количество интервалов возьмите, равного 7.

Все значения выборки лежат в интервале 3,6–8,5 (крайние точки этого промежутка выгодно брать так, чтобы разность 8,5–3,6 делилась на 7). Составьте интервальную таблицу частот и постройте полигон частот, соответствующий интервальной таблице частот. Результат сравните с рис. 4.8.

4.18. При опросе 70 сотрудников некоторого предприятия о размере их зарплаты получили следующие сведения:

Размер зарплаты x_i	Ниже 70	70 – 120	120 – 170	170 – 220	220 – 270	270 – 320	320 – 370
Кол-во сотрудников n_i	8	17	21	12	6	4	2

Найти: 1) интервальную таблицу относительных частот; 2) гистограмму частот; 3) таблицу частот вариационного ряда; 4) таблицу накопленных частот вариационного ряда; 5) постройте комуляту вариационного ряда.

▲ Покажем решение пункта 5). Чтобы построить комуляту, сначала составляют таблицу накопленных частот:

x_i^*	35	95	145	195	245	295	345
n_i	8	17	21	12	6	4	2
S	8	25	46	58	64	68	70

Рис. 4.9

Комулятой называют кривую, которая ограничивает полигон, построенный с помощью накопленных частот (относительных частот) (рис. 4.9). ■

4.19. Нахождение жирности молока (в %) 25 коров дало следующие результаты: 3,45; 3,56; 3,68; 3,66; 3,70; 3,76; 3,75; 3,78; 3,80; 3,94; 3,88; 3,94; 3,93; 3,96; 4,03; 4,03; 3,98; 4,00; 4,08; 4,10; 4,18; 4,35; 3,86; 3,88; 3,90.

Выбрав за длину интервалов $h = 0{,}15\%$:

1) составьте интервальную таблицу частот;
2) постройте гистограмму;
3) найдите моду;

Рис. 4.10

4) найдите медиану;
5) найдите выборочную среднюю;
6) постройте таблицу частот вариационного ряда;
7) постройте таблицу накопленных частот вариационного ряда;
8) постройте комуляту вариационного ряда.

4.20. На рис. 4.10 показаны показатели добычи урана ведущих 6 стран по итогам 2013 года.

Проанализируйте данные этой гистограммы и сделайте выводы.

Упражнения для повторения

4.21. Решите уравнение:

1) $\frac{4}{9x^2-1}-\frac{4}{3x+1}-\frac{4}{1-3x}=0$; 2) $\frac{4}{y+3}-\frac{5}{3-y}=\frac{1}{y-3}-1$.

4.22. Вершина квадратичной функций находится в точке A(1; –2) и ее график проходит через начало координат. Запишите эту функцию и постройте ее график.

4.23. Разложите многочлен x^4+2x^2-3 на множители.

4.2. ВЫБОРОЧНАЯ ДИСПЕРСИЯ И СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Допустим, что из теоретических соображений удалось установить вид закона распределения генеральной совокупности. Тогда, чтобы полностью определить эту закономерность, необходимо найти или оценить неизвестные параметры распределения. К числу таких параметров, в частности, относятся такие величины, как среднее значение, дисперсия, стандартное отклонение (среднее квадратическое отклонения).

Средним значением мы пользуемся с младших классов.

Среднее значение $\Rightarrow$ **Среднее арифметическое значение выборочных данных**

Дана таблица частот вариационного ряда:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Среднее значение определяется формулой

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n}, \ (n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k). \quad (1)$$

Чтобы оценить степень рассеянности выборочных данных от их среднего значения пользуются понятием **дисперсии.** Дисперсия вычисляется по формуле

$$\overline{D} = \overline{X^2} - (\overline{X})^2, \quad (2)$$

где

$$\overline{X^2} = \frac{x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + \ldots + x_k^2 \, n_k}{n}.$$

Квадратный корень от дисперсии называется **стандартным отклонением** (средним квадратическим отклонением):

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}}. \quad (3)$$

Замечание. 1) Дана таблица относительных частот вариационного ряда:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
W_i	W_1	W_2	...	W_k

Среднее значение вычисляется так:

$$\overline{X} = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \ldots + x_k \cdot W_k, \quad (4)$$

$$\overline{X^2} = x_1^2 w_1 + x_2^2 w_2 + \ldots + x_k^2 \cdot w_k. \quad (5)$$

2) В выражениях $\overline{X}$, $\overline{D}$, $\overline{\sigma}$ знак черточки ставится, чтобы подчеркнуть, что они вычислены по выборочным данным.

Пример 1. Вычислим дисперсию и стандартное отклонение выборочных данных, рассмотренных в примере 1 из п. 4.1.

▲ Дано:

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3

и $\overline{X} = 6{,}92$.

Т. к. $\overline{X^2} = \frac{1}{25}\left(4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 4 + 7^2 \cdot 7 + 8^2 \cdot 3 + 9^2 + 10^2 + 3\right) = 50{,}92$,

то $\overline{D} = 50{,}92 - \left(6{,}9^2\right)^2 = 3{,}0336$ и $\overline{\sigma} = \sqrt{3{,}0336} \approx 1{,}74$.

Ответ: $\overline{X} = 6{,}92$, $\overline{D} \approx 3{,}03$, $\overline{\sigma} \approx 1{,}74$. ■

Пример 2. На математической олимпиаде для школьников 10–11 классов было предложено 7 задач и каждая задача оценивалась по 10 баллов. По итогам этой олимпиады первые 30 участников набрали следующие баллы: 57, 53, 49, 47, 46, 45, 45, 44, 39, 38, 38, 37, 35, 35, 34, 34, 33, 31, 30, 30, 29, 28, 27, 27, 26, 25, 25, 25, 18, 15. Найти: 1) объем и размах выборки, количество интервалов; 2) таблицу интервальных частот (относительных частот); 3) гистограмму частот; 4) таблицу частот (относительных частот, накопительных частот) соответствующего вариационного ряда); 5) полигон частот; 6) комуляту частот; 7) среднее значение; 8) дисперсию и стандартное отклонение.

▲ 1) $n = 30$, $x_{max} = 57$, $x_{min} = 15$. Размах таков: $57 - 15 = 42$. Т. к. $log_2 30 \approx$ $\approx 4{,}907$, то количество интервалов будет таким:

$k \approx 4{,}907 + 1 \approx 5{,}9 \approx 6$. Длина интервала $h = \frac{42}{6} = 7$.

2)

Интервал Δ_i	15–22	22–29	29–36	36–43	43–50	50–57
Подсчет	II	~~IIII~~ III	~~IIII~~ III	IIII	~~IIII~~ I	II
Частота n_i	2	8	8	4	6	2
Относит. частота W_i	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$

Здесь совместились две таблицы: таблица частот и таблица относительных частот. По необходимости их можно рассматривать по отдельности.

3) На рис. 4.11 изображена гистограмма частот. Гистограмма относительных частот строится аналогично.

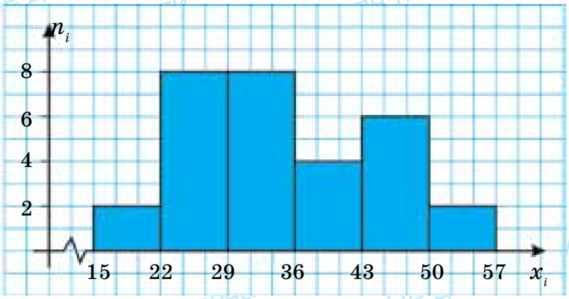


Рис. 4.11

4)

Середина интервала: x_i^*	18,5	25,5	32,5	39,5	46,5	53,5
n_i	2	8	8	4	6	2
W_i	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$
Накопленные частоты: S	2	10	18	22	28	30

5) В качестве варианты берут середины соответствующих интервалов. На рис. 4.12 изображен полигон частот.

Рис. 4.12

6) Комулята изображена на рис. 4.13. Эта кривая построена с помощью накопленных частот.

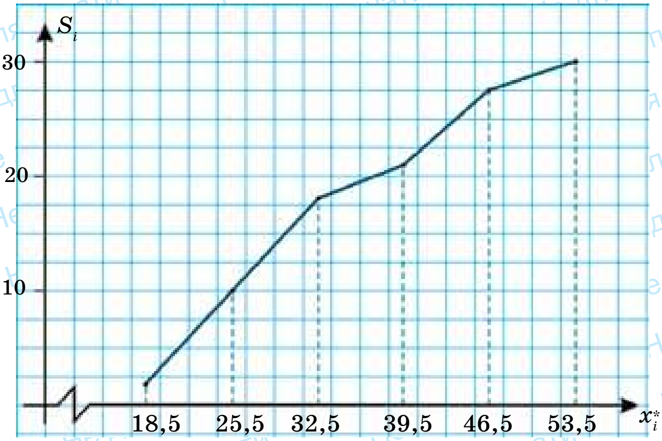


Рис. 4.13

7) Среднее значение таково: $\overline{X} = \frac{1}{30}(18{,}5 \cdot 2 + 25{,}5 \cdot 8 + 32{,}5 \cdot 8 + 39{,}5 \cdot 4 +$

$+ 46{,}5 \cdot 6 + 53{,}5 \cdot 2) = \frac{1045}{30} \approx 34{,}83.$

8) $\overline{X^2} = \frac{1}{30}\Big(18{,}5^2 \cdot 2 + 25{,}5^2 \cdot 8 + 32{,}5^2 \cdot 8 + 39{,}5^2 \cdot 4 + 46{,}5^2 \cdot 6 + 53{,}5^2 \times$

$\times \cdot 2\Big) = \frac{39275{,}5}{30} \approx 1309{,}1833.$

Тогда дисперсия определяется так:

$$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 1309{,}1833 - (34{,}83)^2 \approx 96{,}05.$$

Стандартное отклонение таково: $\overline{\sigma} = \sqrt{D} = \sqrt{96{,}05} \approx 9{,}8.$ ■

1) Как определяется среднее значение выборки?
2) Что называется дисперсией выборки?
3) Что называется стандартным отклонением (средним квадратическим отклонением) выборки?

Практическая работа

Выпишите количество учащихся каждого класса, обучающихся в вашей школе. По этим данным найдите: 1) объем и размах; 2) составьте интервальную таблицу частот (относительных частот); 3) постройте гистограмму частот; 4) составьте таблицу частот (относительных частот) соответствующего вариационного ряда; 5) постройте полигон частот вариационного ряда; 6) постройте комуляту частот; 7) моду и медиану, среднее значение вариационного ряда; 8) дисперсию и стандартное отклонение.

Упражнения

A

4.24. Найдите дисперсию и стандартное отклонение выборочных данных, заданных в упражнениях 4.1–4.5.

4.25. Найдите среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение выборки, данных в упражнениях 4.6–4.10.

B

4.26. Найдите дисперсию и стандартное отклонение выборки данных, заданных в упражнениях 4.11–4.20.

4.27. По выборочным данным, приведенным на рис. 4.14, найдите среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение.

4.28. На рис. 4.15 приведены данные о добыче нефти передовых 20 нефтедобывающих стран мира. По этим данным найдите среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение выборки.

Население Казахстана на 1 янв. 2016 г. (млн чел.)

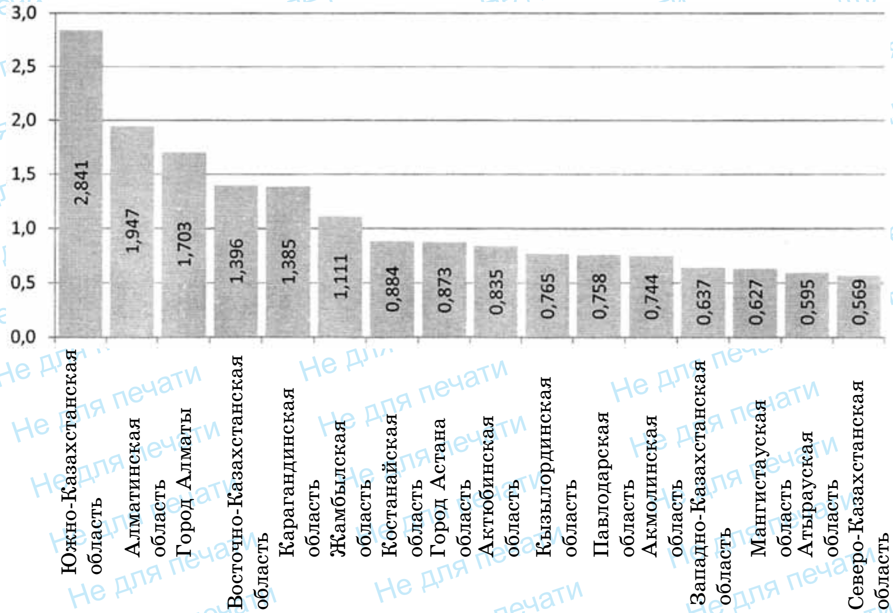


Рис. 4.14

Список стран по добыче нефти, 2015 г. (млн бар./день)

Рис. 4.15

C

Чтобы создать гистограмму в Excel, воспользуйтесь мастером гистограмм из пакета анализа. Для построения гистограммы используются два столбца данных – один с данными, которые необходимо проанализировать, и один с числами, которые обозначают интервалы, необходимые для измерения частоты.

Убедитесь, что вы загрузили пакет анализа, чтобы добавить команду **Анализ данных** на вкладку **Данные.** Тогда вы будете готовы создать гистограмму. Вот как это можно сделать:

1. В один столбец на листе введите исходные данные. При необходимости добавьте в первую ячейку подпись.

Используйте количественные числовые данные, например количество элементов или результаты тестов. Мастер гистограмм не будет работать с такими количественными числовыми данными, как идентификационные номера, введенные в виде текста.

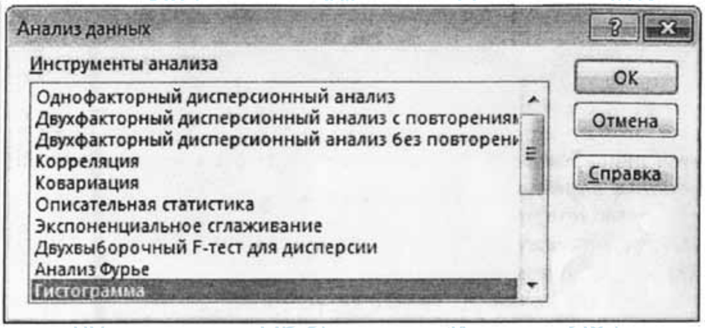
2. В следующий столбец введите интервалы в возрастающем порядке. При необходимости добавьте в первую ячейку подпись.

Используйте собственные интервалы, поскольку они могут лучше соответствовать целям вашего анализа. Если вы не введете их, мастер гистограмм создаст равномерно распределенные интервалы, используя минимальное и максимальное значение во введенном диапазоне в качестве начальной и конечной точек.

3. Откройте вкладку **Данные** и выберите команду **Анализ данных.**

Анализ данных **Анализ**

4. Выберите пункт **Гистограмма** и нажмите кнопку ОК.



5. В разделе **Ввод** выполните указанные ниже действия:

а) В поле **Формировать список по диапазону** введите ссылку на ячейку с диапазоном данных, который содержит исходные числа.

б) В поле **Интервал карманов** введите ссылку на ячейку с диапазоном, который содержит числа интервала.

Если на листе использовались подписи столбцов, можно включать их в ссылки на ячейки.

СОВЕТ. Вместо того чтобы вводить ссылки вручную, можно нажать кнопку, чтобы временно свернуть диалоговое окно для выбора диапазонов на листе. При повторном нажатии этой кнопки диалоговое окно опять разворачивается.

6. Если подписи столбцов были включены в ссылки на ячейки, установите флажок **Подписи.**

7. В группе **Параметры вывода** выберите местоположение выходных данных.

Гистограмму можно расположить на том же листе, новом листе в текущей книге или в новой книге.

8. Установите один или несколько флажков:

9. Парето (отсортированная гистограмма). Отображает частоту данных по убыванию.

10. Суммарный процент. Отображает суммарные проценты и добавляет в гистограмму строку суммарных процентов.

11. Вывод диаграммы. Отображает встроенную гистограмму,

Нажмите кнопку ОК.

Если вы хотите настроить гистограмму, можно изменить подписи и, щелкнув в любом месте гистограммы, использовать кнопки **Элементы диаграммы, Стили диаграммы** и **Фильтры диаграммы** справа от диаграммы.

В упражнениях 4.29–4.32 приведены выборочные данные. С помощью Excel постройте гистограмму. Найдите среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение.

4.29.

79	82	72	76	84	77	99	75	85	93
73	82	84	72	88	79	70	79	85	88
82	83	87	77	81	82	81	94	81	78
93	84	72	81	81	91	81	89	81	86
81	83	73	84	84	83	81	85	65	73
74	81	74	69	81	86	69	79	67	81
82	87	70	81	84	81	86	66	86	87
80	82	89	69	77	81	93	89	71	75
82	76	83	75	74	73	76	69	78	66
81	92	82	83	87	83	79	78	93	96

4.30.

45	68	52	63	69	69	57	87	48	53
51	71	57	78	73	74	68	68	55	85
55	55	32	12	62	75	77	31	54	64
46	13	57	45	49	46	13	51	54	34

63	55	52	65	79	65	59	49	41	02
68	43	69	43	56	48	51	53	39	38
79	69	77	62	48	92	43	59	26	26
69	54	56	55	49	95	46	66	72	35
46	36	62	42	32	62	61	48	36	38
49	54	56	28	17	65	32	59	07	25

4.31.

25	07	59	32	65	32	63	57	63	45
38	36	48	61	52	17	42	52	54	56
35	82	66	43	95	48	78	22	71	55
26	16	59	46	92	49	45	57	51	51
38	41	53	51	48	79	65	69	13	68
02	39	49	59	65	66	43	52	55	63
34	52	51	77	46	52	62	66	43	79
35	54	31	13	75	49	55	77	96	63
53	53	68	57	74	69	42	55	54	45
74	48	87	68	69	43	28	62	36	49

4.32.

77	55	46	53	49	13	15	79	36	27
62	79	65	21	31	65	47	44	72	55
42	66	48	58	53	42	68	53	25	64
45	48	92	54	59	53	78	55	46	03
65	48	95	52	66	43	59	65	35	24
43	32	54	69	56	68	51	68	02	18
32	16	61	77	52	54	43	63	34	88
25	35	28	21	85	28	32	92	35	30
87	32	69	67	28	55	49	46	53	45
87	62	75	72	92	62	54	35	59	56

Упражнения для повторения

4.33. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

4.34. Найдите наибольшее значение выражения:

1) $\dfrac{1}{x^2+1}$; 2) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$; 3) $\dfrac{2}{4+\sqrt{x}}$.

4.35. Покажите, что прямая $3x + 4y = 25$ касается окружности $x^2 + y^2 = 25$ и найдите координату точки касания.

10–3458

Раздел 5. Неравенства

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- будем решать квадратные неравенства;
- будем решать рациональные неравенства;
- будем решать системы из двух неравенств, одно из которых линейное, а второе – квадратное;
- будем решать системы и совокупности двух квадратных неравенств;
- будем знать свойства числовых неравенств;
- будем знать методы доказательства неравенств;
- будем знать геометрический смысл неравенств с двумя переменными.

5.1*. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Свойства числовых неравенств

Любые действительнего числа a и b можно сравнить:

$a - b = 0$	$a = b$	Числа a и b равны.
$a - b > 0$	$a > b$	Говорят, что число a больше числа b.
$a - b < 0$	$a < b$	Говорят, что число a меньше числа b.

Пример 1. Сравнить числа $\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{9}$.

$$▲\ \frac{7}{8}-\frac{8}{9}=\frac{7\cdot 9-8\cdot 8}{8\cdot 9}=-\frac{1}{72}<0 \Rightarrow \frac{7}{8}<\frac{8}{9}\ ■$$

Числовые выражения со знаками $<$, $>$, $\leqslant$ и $\geqslant$ называются **числовыми неравенствами.** Здесь неравенства со знаками $<$ и $>$ называются **строгими,** а со знаками $\leqslant$ и $\geqslant$ – **нестрогими** неравенствами.

$a < c < b$ – двойные неравенства $\Leftrightarrow \begin{cases} a < b, \\ c < d \end{cases}$

Свойства неравенств:	Доказательство:
1°. $a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$.	▲ $a - c = (a - b) + (b - c)$ и $a - b < 0$, $b - c < 0 \Rightarrow a - c < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a < c$. ■
2°. $a < b \Rightarrow$ для любого c выполняется равенство $a + c < b + c$. Прибавление числа к неравенству.	▲ $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b < 0 \Rightarrow a + c < b + c$. ■
Следствие 1. $a + c < b \Rightarrow a < b - c$, т. е. можно переносить слагаемые из одной части неравенства в другую часть с противоположным знаком.	▲По свойству 2° к обеим частям неравенства $a + c < b$ достаточно прибавить число $(-c)$. ■
3°. Сложение неравенств. $\begin{cases} a < b, \\ c < d \end{cases} \oplus \Rightarrow a + c < b + d$, т. е. сложить неравенства с одинаковым смыслом почленно.	▲$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) <$ < 0, т. к. $a - b < 0$ и $c - d < 0$. ■
Следствие 2. Вычитание неравенств. $a < b$, $c < d \Rightarrow a - d < b - c$.	▲ Вытекает из следствия 1 и свойства 3°. ■
4°. Умножение неравенства на число. $a > b$, $c > 0 \Rightarrow ac > bc$; $a > b$, $c < 0 \Rightarrow ac < bc$, т.е при умножении на положительное число знак неравенства сохраняется, а при умножении на отрицательное число знак неравенства меняется на знак, противоположный по смыслу.	$c > 0$, $a > b \Rightarrow ac - bc = c(a - b) >$ $> 0 \Rightarrow ac > bc$. Второе неравенство доказывается аналогично. ■
5°. Деление неравенства на число. $a > b$, $c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; $a > b$, $c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	Доказывается так же, как свойство 4°.

6°. Умножение неравенств. $\begin{cases} a > b > 0, \\ c < d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd,$ т. е. неравенства с одинаковым смыслом с положительными членами можно почленно умножать друг с дргом.	▲ $ac - bd = (ac - bc) + (bc - bd) =$ $= c(a - b) + b(c - d) > 0$. ■
7°. Деление неравенств. $\begin{cases} a > b > 0, \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}.$	▲ $\frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac - bd}{cd} > 0,$ т. к. $cd > 0$ и $ac - bd > 0$ (по свойству 6°) $\Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$. ■
Следствие 3. Неравенство обратных величин. $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$	Вытекает из свойства 7°.
Следствие 4. Возведение в степень неравенства. $a > b > 0 \Rightarrow$ для любого натурального числа n выполняется неравенство $a^n > b^n$.	Вытекает из свойства 6°.

Неравенство, справедливое при всех допустимых значениях букв в его составе, называют **истинным неравенством.**

Процесс установления истинности неравенства называется **доказательством неравенства.**

Пример 2. Доказать неравенство $(a-3)(a-5) < (a-4)^2$.

▲ $(a-3)(a-5)-(a-4)^2 = a^2 - 8a + 15 - a^2 - 16 = -1 < 0$. ■

Пример 3. Покажем, что при любых a и b выполняется неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

▲ $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. ■

Методы доказательства неравенств

1. Доказательство неравенств по определению.
Здесь используется то, что если $a - b > 0$, то по определению $a > b$. Примеры 2 и 3 доказаны по определению.

Пример 4. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то верно неравенство $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

▲ $a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ ■

2. Доказательство неравенств методом от противного.

Пример 5. Если $ab > 0$, то покажем справедливость неравенства

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2.$$

▲ Докажем методом от противного, т.е. пусть при $ab > 0$ выполняется неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} < 2 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} < 0 \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} < 0$, т.е. получили противоречие, т. к. $(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$ и $ab > 0$. Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно, т. е. справедливо неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$. ■

3. Метод опорных неравенств. Сутью этого метода является доказательство данного неравенства с помощью некоторых истинных неравенств или уже доказанных неравенств. Такие вспомогательные неравенства называются **опорными неравенствами.** Например, неравенства $a^2 \geqslant 0$, $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$ $(ab > 0)$ и т. д. можно взять в качестве опорных неравенств.

Пример 6. Покажем, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ справедливо неравенство $(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc$.

▲В качестве опорных неравенств возьмем неравенства: $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $a + c \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b + c \geqslant 2\sqrt{ab}$, доказанные в примере 4. По свойству 6° эти неравенства можно почленно перемножить: $(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{bc} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$. ■

4. Доказательство методом оценки. Этот метод используют для доказательства числовых неравенств.

Пример 7. Какое из чисел больше: $\sqrt{27}+\sqrt{6}+1$ или $\sqrt{48}$?

▲ Так как $\sqrt{27}>\sqrt{25}\left(\sqrt{25}=5\right)$ и $\sqrt{6}>\sqrt{4}\left(\sqrt{4}=2\right)$, то верно неравенство $\sqrt{27}+\sqrt{6}+1>8$. А так как $\sqrt{48}<\sqrt{49}\left(\sqrt{49}=7\right)$, то верно неравенство $\sqrt{27}+\sqrt{6}+1>\sqrt{48}$. ■

1. При каких условиях число a больше числа b? Как это обозначают?
2. Покажите знаки строгого и нестрогого неравенств.
3. Какие свойства числовых неравенств вы знаете? Докажите их.
4. Что вы понимаете под доказательством неравенства?
5. Назовите методы доказательства неравенств и раскройте их смысл.

Практическая работа

Покажите, что если число b является приближенным значением числа $\sqrt{a}$ по недостатку (по избытку), то число $\frac{a}{b}$ является приближенным значением числа $\sqrt{a}$ по избытку (по недостатку), т.е. необходимо показать, что если $\sqrt{a}>b$, то $\sqrt{a}<\frac{a}{b}$ (или наоборот). Поэтому арифметическое среднее чисел b и $\frac{a}{b}$ также является приближенным значением числа $\sqrt{a}$. Из этого принципа получим следующую рекуррентную формулу для нахождения приближенного значения числа $\sqrt{a}$: $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, $x_1=a$. Если в указанном алгоритме: 1) $x_1=5$; 2) $x_1=2{,}5$, то на каком шаге число x_n дает приближенное значение числа $\sqrt{5}$ с точностью до 0,001? Проверьте это с помощью калькулятора. Сделайте вывод. Каково влияние выбора значения x_1 на процесс нахождения приближенных значений числа $\sqrt{5}$?

Упражнения

А

5.1. Известно, что $a<b$, $c>b$, $c<d$, $a>e$. На числовой оси изобразите порядок расположения чисел a, b, c, d и e.

5.2. Определите знаки чисел a и b, если:
1) $a-3>b-3$ и $b>4$; 2) $7a>7b$ и $b>1$;

3) $a - 8 > b - 8$ и $a < -12$; 4) $-2a > -2b$ и $b < -0{,}3$.

3) ▲ $a - 8 > b - 8 \Rightarrow a > b$ и $a < -12 \Rightarrow b < a < -12 \Rightarrow a < 0, b < 0$ ■

5.3. Какое неравенство получится, если к обеим частям неравенства $a > b$: 1) прибавить 5; 2) прибавить -2? Какое неравенство получится, если обе части неравенства $a > b$: 3) умножить на 0,5; 4) умножить на -3; 5) разделить на 4; 6) разделить на $-0{,}1$?

5.4. Какое двойное неравенство выполняется для выражения: 1) $5a$; 2) $-a$; 3) $a + 2$; 4) $a - 2$; 5) $5 - a$; 6) $0{,}2a + 3$, если $3 < a < 4$?

5.5. Оцените выражение: 1) $6x$; 2) $-10x$; 3) $x - 5$; 4) $3x + 2$, если $5 < x < 8$.

5.6. Докажите неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ методами 1, 2, 3.

5.7. Докажите неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, если $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$.

▲ Т.к. $a > 0$, то ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, а т. к. $D = b^2 - 4ac < 0$, то эта парабола не пересекается с осью Ox. Поэтому парабола будет расположена выше оси абсцисс, т. е. $ax^2 + bx + c > 0$ (рис. 5.1). ■

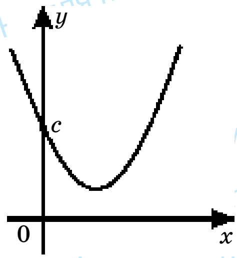


Рис. 5.1

5.8. Докажите неравенство:

1) $x^2 + 2x + 2 > 0$; 2) $y^2 - 6y + 10 > 0$;

3) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$; 4) $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$.

B

5.9. Оцените выражение $\dfrac{1}{y}$, если: 1) $5 < y < 8$; 2) $0{,}125 < y < 0{,}25$.

5.10. Докажите неравенство, применяя определение неравенства:

1) $3(a + 1) + a < 4(2 + a)^2$; 2) $(7p - 1)(7p + 1) < 49p^2$;

3) $(a - 2)^2 > a(a - 4)$; 4) $(2a + 3)(2a + 1) > 4a(a + 2)$;

5) $2b^2 - 6b + 1 > 2b(b - 3)$; 6) $(c + 2)(c + 6) < (c + 3)(c + 5)$;

7) $p(p + 7) > 7p - 1$; 8) $8e(3e - 10) < (5e - 8)^2$.

5.11. Истинно ли неравенство для каждого значения x?

1) $4x(x + 0,5) > (2x + 3)(2x - 3)$;

2) $(3x + 8)^2 > 3x(x + 16)$;

3) $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$;

4) $(7 + 2x)(7 - 2x) < 49 - x(4x + 1)$.

5.12. Докажите неравенство:

1) $a(a+b) \geqslant ab$;
2) $a(a-b) \geqslant b(a-b)$;
3) $2bc \leqslant b^2 + c^2$;
4) $m^2 - mn + n^2 \geqslant mn$;
5) $10a^2 - 5a + 1 \geqslant a^2 + a$;
6) $a^2 - a \leqslant 50a^2 - 15a + 1$;
7) $\frac{c^2+1}{2} \geqslant c$;
8) $\frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

2) ▲ $a(a-b)-b(a-b)=(a-b)(a-b)=(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a(a-b) \geqslant b(a-b)$ ■

5.13. Числа a и b – неравные положительные числа. Какое из выражений $a^3 + b^3$ и $ab(a + b)$ больше?

5.14. Докажите неравенство, применяя определение неравенства:

1) $(6y - 1)(y + 2) < (3y + 4)(2y + 1)$;

2) $(3x - 1)(2x + 1) > (2x - 1)(2 + 3x)$;

3) $x^2 + 4y^2 + 3z^2 > 2x + 12y + 6z - 14$;

4) $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2(a + b)$.

5.15. Докажите неравенство методом доказательства от противного:

1) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2 (a > 0)$;
2) $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geqslant 4$ $(a > 0, b > 0)$;
3) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ad} + \sqrt{bc}$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0, d \geqslant 0)$;
4) $\frac{a^2}{a^4+1} \leqslant 0,5$;
5) $ab(a+b) \leqslant a^3 + b^3$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$;

5) ▲ Пусть при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0 \Rightarrow ab(a + b) > a^3 + b^3$. Отсюда $ab(a + b) - (a^3 + b^3) > 0 \Rightarrow ab(a + b) - (a + b)(a^2 - ab + b^2) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a + b)(ab - a^2 + ab - b^2) > 0 \Rightarrow (a + b)(2ab - a^2 - b^2) > 0 \Rightarrow -(a + b) \times (a - b)^2 > 0$, $a + b \geqslant 0$, $(a - b)^2 \geqslant 0$ – противоречие. Это противоречие приводит к доказательству неравенства $ab(a + b) \leqslant a^3 + b^3$. ■

6) $a^5 + b^5 \geqslant a^4b + ab^4$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$.

5.16. Докажите неравенство методом опорных неравенств:

1) $x^2+2y^2+2xy+6y+10\geqslant 0$; 2) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$;

3) $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}(a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0)$;

4) $(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc(a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0, a+b+c=1)$;

5) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$; 6) $\dfrac{x+y}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

5.17. Сравните числа:

1) $\dfrac{86}{87}$ и $\dfrac{87}{88}$; 2) $\dfrac{113}{112}$ и $\dfrac{112}{111}$; 3) $436\cdot 438$ и 437^2;

4) 74^2-27^2 и 73^2-26^2; 5) $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{22}-\sqrt{10}$;

6) $\sqrt{38}+\sqrt{20}$ и $\sqrt{37}+\sqrt{21}$.

5.18. Сравните выражения:

1) $(a-1)(a+2)$ и $(a-3)(a+4)$; 2) a^2+1 и $2|a|$;

3) a^2+5 и $2a+3$; 4) $1-a$ и $\dfrac{1}{a}-1(a>0)$;

5) a^2+25 и $10a$; 6) $(b+3)^2$ и $(b+2)(b+4)$;

7) $(a-2)^2$ и $4(1-a)$; 8) a^4+1 и $2a|a|$.

4) ▲ $1-a-\left(\dfrac{1}{a}-1\right)=\dfrac{a-a^2-1+a}{a}=-\dfrac{(a-1)^2}{a}\leqslant 0\Rightarrow 1-a\leqslant\dfrac{1}{a}-1$ ■

C

5.19. Докажите неравенство $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant\sqrt{a+b}$, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

5.20. Докажите неравенство $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$, если $a>0$, $b>0$.

5.21. Докажите неравенство $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}\geqslant a+b+c$, если $a>0$, $b>0$ и $c>0$.

5.22. Докажите неравенство $-\sqrt{2}\leqslant x+y\leqslant\sqrt{2}$, если $x^2+y^2=1$.

5.23. Докажите неравенство $a^4+b^4\geqslant 2$, если $a^2+b^2=2$.

5.24. Докажите, что $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}>2$.

5.25. Докажите неравенство $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc$, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

5.26. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше его полупериметра.

5.27. Числа a, b и c являются длинами сторон треугольника. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

5.28. Сравните время, затраченное моторной лодкой на путь в 20 км в стоячей воде, и время, затраченное моторной лодкой на путь в 10 км против течения реки и 10 км по течению реки.

Упражнения для повторения

5.29. Решите неравенство:

1) $\dfrac{3x-2}{5}-\dfrac{x+6}{10}>1$; 2) $\dfrac{3+x}{4}+\dfrac{2-x}{3}<0$.

5.30. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 20 км/час, затратила 3 ч на путь в 36 км против течения реки и 22 км по течению реки. Какова скорость течения реки?

5.31. При каких значениях b уравнение $2x^2+bx+18=0$ имеет 2 корня?

5.2. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Понятие решения неравенств

Доказательство неравенств	Установить истинность неравенства при всех указанных допустимых значениях переменных (букв), входящих в состав этого неравенства.	Не путайте эти два понятия!
Решение неравенств	Нужно найти все значения переменных, входящих в состав неравенства, при которых это неравенство истинно.	

Значения переменных, удовлетворяющих данному неравенству, называют его **решением**.

Число 1 является решением неравенства $3-2x-x^2>x^3-1$, т.к. $3-2\cdot1+1^2>1^3-1\Rightarrow 2>0$, т.е. данное неравенство верное.
Число 2 не является решением неравенства $3-2x-x^2>x^3-1$, т.к. $3-2\cdot2+$ $+2^2>2^3-1\Rightarrow 3>7$, т.е. данное неравенство неверное.

Итак, **решить неравенство – значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решения.** Неравенства, имеющие одинаковые решения, называют **равносильными неравенствами.** Например, неравенства $x^2+2x>(x-1)(x+1)$ и $2x>-1$ являются равносильными. Неравенства, которые не имеют решения, также являются равносильными. Например, неравенства $x^2+1<0$ и $x^4+x^2+3<1$ равносильны, так как они не имеют решения.

Решение квадратных неравенств с одной переменной

Пример 1. Решим неравенство $2x^2+3x-2\leqslant 0$.

▲ **1-ый способ (метод интервалов).** Сначала найдем корни уравнения $2x^2+3x-2=0\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=\frac{1}{2}$. Тогда $2x^2+3x-2==2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ и данное неравенство записывается так: $2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$.

Числа $x_1=-2$ и $x_2=\frac{1}{2}$ делят числовую ось на три промежутка, в каждом из них исследуем знаки данного квадратного трехчлена (рис. 5.2). Ответ задачи будет таким: $-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ или $[-2;\frac{1}{2}]$. ■

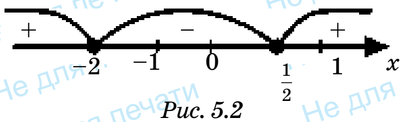


Рис. 5.2

▲**2-ой способ** (графический метод). Сначала построим график функции $y=2x^2+3x-2$. Тогда значения переменной x, при которых график этой функции расположен ниже оси Ox, определяют ответ задачи. По рис.5.3 видно, что ответ таков: $[-2;\ \frac{1}{2}]$.

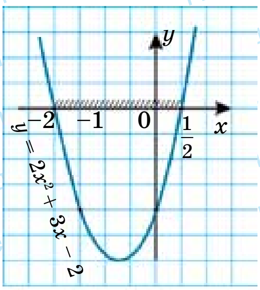


Рис. 5.3

Пример 2. Решим неравенство $4x-x^2-5>0$.

▲ Квадратный трехчлен $4x-x^2-5$ не имеет корней. Решим неравенство графическим методом. График функции $y = 4x - x^2 - 5$ изображен на рис. 5.4. Этот график расположен ниже оси Ox, значит, данная функция принимает только отрицательные значения, поэтому исходное неравенство решения не имеет. **Ответ:** $\varnothing$. ■

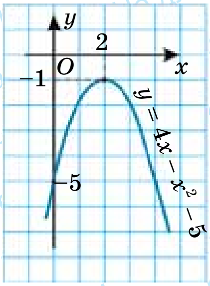


Рис. 5.4

Рис. 5.5

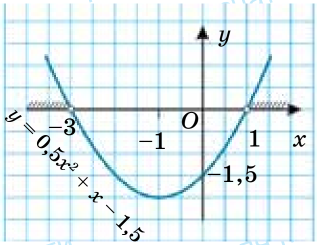


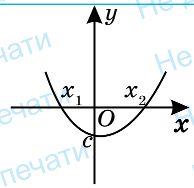
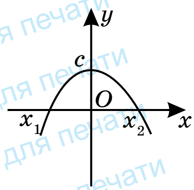
Рис. 5.6

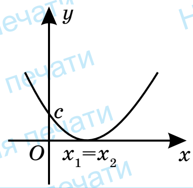
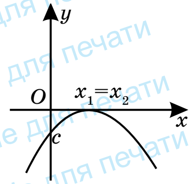
Пример 3. Решим неравенство $0{,}5x^2 + x - 1{,}5 > 0$.

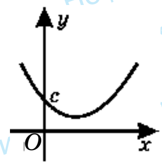
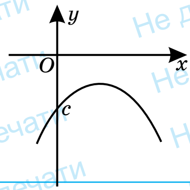
▲ Корнями трехчлена $0{,}5x^2 + x - 1{,}5$ являются числа -3 и 1. Тогда $0{,}5x^2 + x - 1{,}5 = 0{,}5(x + 3)(x - 1)$. На рис. 5.5 изображены знаки данного квадратного трехчлена, а на рис. 5.6 – график функции $y = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$. **Ответ:** $(-\infty; -3)\cup(1; +\infty)$. ■

Замечание. При строгих неравенствах концы промежутков не входят в ответ задачи и на рисунках эти точки изображаются незакрашенным кружком. А при нестрогих неравенствах эти точки входят в ответ задачи и на рисунках такие точки изображаются закрашенными кружками.

На основании этих примеров можно сделать нижеследующие выводы.

a		$D > 0$	
		Ответ	Геометрический смысл
$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	
	$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x \in (x_1; x_2)$	
$a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	
	$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x \in (x_1; x_2)$	
	$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	

a		$D = 0$	
		Ответ	Геометрический смысл
$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2; +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \varnothing$	
	$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x = x_1$	
$a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \varnothing$	
	$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x = x_1$	
	$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$	

a		$D < 0$	
		Ответ	Геометрический смысл
$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \varnothing$	
	$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x \in \varnothing$	
$a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \varnothing$	
	$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$	
	$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x \in \varnothing$	
	$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$	

Решение системы неравенств с одной переменной

Пример 4. Решим систему неравенств $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x < 0. \end{cases}$

▲ Каждое неравенство системы, являющееся квадратным, решим методом интервалов. Так как квадратный трехчлен $x^2 - x - 6$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$, то решением неравенства $x^2 - x - 6 \geqslant 0$ является множество $x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$ (рис. 5.7). А корни уравнения $x^2 - 4x = 0$ равны 0 и 4, поэтому решением неравенства $x^2 - 4x < 0$ является множество $x \in (0; 4)$ (рис. 5.8). Тогда ответом данной системы неравенств является пересечение этих множеств (рис. 5.9): $\{(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)\} \cap (0; 4] = [3; 4)$. ■

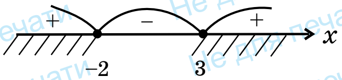


Рис. 5.7

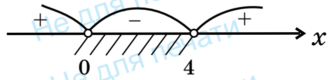


Рис. 5.8

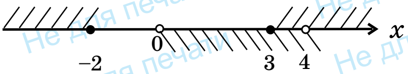


Рис. 5.9

Пример 5. Решим совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x < 0. \end{array}\right.$

▲ $\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+2) \geqslant 0, \\ x(x-4) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -2] \cup (3; +\infty], \\ x \in (0; 4) \end{array}\right. \Rightarrow$

$x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty) \cup (0; 4) = (-\infty; -2] \cup (0; +\infty).$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$ ■

Каждое решение системы является решением всех неравенств, вошедших в состав этой системы. ⇒ **Ответ:** пересечение всех множеств решений, полученных при решении каждого неравенства системы.

Каждое решение совокупности является решением хотя бы одного неравенства, вошедшего в состав этой совокупности. ⇒ **Ответ:** объединение всех множеств решений, полученных при решении каждого неравенства совокупности.

1. Что значит решить неравенство?
2. Какие неравенства называются равносильными?
3. Какие неравенства называются квадратными?
4. Объясните решение неравенств методом интервалов.
5. Объясните графический способ решения квадратных неравенств.
6. Как решаются системы неравенств с одной переменной?

Творческая работа

На лагерь альпинистов сбросили тюки с продовольствием и необходимой амуницией. Из-за того что метеоусловия ухудшились, вертолет не может приблизиться к поверхности земли менее, чем на 10 м. Если тюки упадут на землю со скоростью, большей, чем 20 м/с, то отдельные части оборудования могут выйти из строя. Опыт показал, что сбрасываемый груз с вертолета имеет начальную скорость, равную в среднем 1 м/с. Выясните, в пределах какой высоты должен находиться вертолет, чтобы сбрасываемый им груз не вышел из строя? Здесь скорость свободного падения за время t с начальной скоростью v_o вычисляется по формуле $v = v_o + gt$, а высота свободного падения за время t вычисляется по формуле $h = v_o t + \dfrac{gt^2}{2}$, где $g = 9{,}8$ м/с² – ускорение свободного падения.

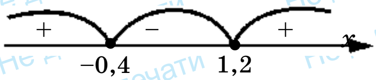
Упражнения

А

В упражнениях **5.32–5.35, 5.39–5.41** решите неравенства.

5.32. 1) $x^2 < 9$; 2) $x^2 \geqslant 4$;
3) $(3x - 5)^2 < 1$; 4) $(2 - 5x)^2 \geqslant 16$;
5) $(x - 7)^2 + 1 > 0$; 6) $49 - (3x + 2)^2 \geqslant 0$.

4) ▲ **1-ый способ.** $(2 - 5x)^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow 4 - 20x + 25x^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow 25x^2 - 20x - 12 \geqslant 0 \Rightarrow x_1 = -0{,}4,\ x_2 = 1{,}2 \Rightarrow 25(x + 0{,}4)(x - 1{,}2) \geqslant 0$



Ответ: $x \in (-\infty;\ -0{,}4] \cup [1{,}2;\ +\infty)$. ■

▲ **2-ой способ.** $(2 - 5x)^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow (5x - 2)^2 \geqslant 16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |5x - 2| \geqslant 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 2 \geqslant 4, \\ 5x - 2 \leqslant -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1{,}2, \\ x \leqslant -0{,}4. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -0{,}4] \cup [1{,}2;\ +\infty)$. ■

5) ▲ Т. к. $(x - 7)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$ неравенство $(x - 7)^2 + 1 > 0$ верно при любых значениях x. Ответ: $x \in (-\infty;\ +\infty)$. ■

5.33. 1) $(x - 1)(2x - 3) < 0$; 2) $(x + 3)(x - 1) \geqslant 0$;

3) $5(x-\frac{1}{5})(x+4)>0$; 4) $(x+2)(2x-3)\leqslant 0$;

5) $(3x+1)(x+3)<0$; 6) $(5x-3)(2x+7)\geqslant 0$.

5.34. 1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4\geqslant 0$;

3) $x^2-8x-9<0$; 4) $-x^2-2x+48<0$;

5) $-x^2+x+6\geqslant 0$; 6) $2x^2+3x-5\geqslant 0$.

5.35. 1) $6x^2-7x+1<0$; 2) $25x^2-10x+1\geqslant 0$;

3) $49x^2-28x+4<0$; 4) $8x^2+10x-3\geqslant 0$;

5) $2y^2+9y+9\leqslant 0$; 6) $x^2+7x-60<0$.

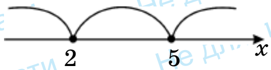
5.36. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству: 1) $6x-x^2>0$; 2) $3x+x^2\leqslant 0$; 3) $x^2-4\leqslant 0$; 4) $5-x^2>0$.

5.37. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{(x-3)(x+1)}$; 2) $y=\sqrt{(2x-1)(x+4)}$;

3) $y=\sqrt{(x-2)(5-x)}$; 4) $y=\sqrt{(4x+3)(3-2x)}$.

3) ▲ $(x-2)(5-x)\geqslant 0 \Rightarrow (x-2)(-1)(x-5)\geqslant 0 \Rightarrow -(x-2)(x-5)\geqslant 0 \Rightarrow (x-2)(x-5)\leqslant 0$.



Ответ: $x\in[2;\,5]$. ■

5.38. Решите систему неравенств и найденные решения изобразите на числовой оси:

1) $\begin{cases}17x-2>x-4,\\ 3-9x<1-x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}25-6x\leqslant 4+x,\\ 3x+7{,}7>1+4x;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x-5\geqslant 4-x,\\ 7-3x<12+x;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x-4<8,\\ 2x+5<13,\\ 3-x>1;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}2x-1<x+3,\\ 5x-1>6-2x,\\ x-3<0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3x-5>x-3,\\ 2x+4<3x+5,\\ 7-2x>x-2.\end{cases}$

5.39. Решите систему неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l}x-5<7,\\ x^2-3x+2\geqslant 0;\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}2x+1\leqslant x+5,\\ x^2-8x+12<0;\end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l}x+5<7,\\ x^2-7x+6\leqslant 0;\end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l}7-2x\geqslant x-2,\\ x^2-2x>63.\end{array}\right.$

5.40. Решите совокупность неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l} x-5<7, \\ x^2-3x+2\geqslant 0; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 2x+1\leqslant x+5, \\ x^2-8x+12<0; \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l} x+5<7, \\ x^2-7x+6\leqslant 0; \end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l} 7-2x\geqslant x-2, \\ x^2-2x>63. \end{array}\right.$

B

5.41. 1) $3x^2+40x+10<-x^2+11x+3$;
2) $9x^2-x+9\geqslant 3x^2+18x-6$;
3) $2x^2-8x-111<(3x-5)(2x+6)$;
4) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$;
5) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$;
6) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

5.42. 1) $(x-3)^2(x+1)<0$; 2) $(2x+3)^2(x-5)>0$;
3) $|x-3|(x+1)\geqslant 0$; 4) $|x-5|(2x+3)\leqslant 0$.

4) ▲ $|x-5|\geqslant 0\Rightarrow x=5$; $2x+3\leqslant 0\Rightarrow x\leqslant -1{,}5$.

Ответ: $x\in(-\infty;\,-1{,}5]\cup\{5\}$. ■

5.43. 1) $(x^2-4)(2x-1)<0$; 2) $(9-x^2)(6-5x)\geqslant 0$;
3) $(x-1)(x+2)(3x-1)>0$; 4) $(2x-5)(x+0{,}5)(3x+7)\leqslant 0$.

5.44. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{144-9x^2}$; 2) $y=\sqrt{x^2-2x-63}$;

3) $y=\sqrt{x(x+16)+64}$; 4) $y=\sqrt{36-5x-x^2}$.

5.45. Докажите равносильность неравенств:

1) $x^2<a^2$ и $|x|<a$ $(a>0)$; 2) $x^2>a^2$ и $|x|>a$ $(a>0)$.

5.46. Докажите равносильность неравенств: 1) $|x|<a$ $(a>0)$ и $-a<x<a$; 2) $|x|>a$ $(a>0)$ с совокупностью неравенств $x<-a$ и $x>a$.

5.47. Решите неравенства:

1) $|x-3|<2$; 2) $|x+1|>3$; 3) $|2x+1|\leqslant 1$; 4) $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\geqslant 4$.

5.48. При каких значениях x значения функции:
1) $y = -x^2 + 8x + 2$ больше 9; 2) $y = 2x^2 + x - 6$ меньше 4?

5.49. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 42}}{x - 11}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{16 - 24x + 9x^2}}{x + 2}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{3 - x^2}}{x - 1}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{4x - 5x^2}}{2x - 1}$;

5) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 16x}}{x + 3}$.

3) ▲ $\begin{cases} 3 - x^2 \geqslant 0, \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant 3, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Ответ:** $[-\sqrt{3};\ 1) \cup (1;\ \sqrt{3}]$. ■

5.50. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 21x^2 + 39x - 6 < 0, \\ x < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 > 0, \\ 7x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ 3x - 12 > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + 7x + 10 < 0, \\ 4x - 3{,}6 > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 7 > 0, \\ x^2 + 5x \leqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 20 \leqslant 0, \\ x - 1{,}5 \geqslant 0. \end{cases}$

5.51. Решите совокупность уравнений:

1) $\left[\begin{array}{l} 21x^2 + 39x - 6 < 0, \\ |x| - 3 > 1; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 4x^2 + 5x > 6, \\ 7x > x^2; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ 3|x| - 12 > 0; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} x^2 + 7x + 10 < 0, \\ 4|x| - 3{,}6 > 0; \end{array}\right.$ 5) $\left[\begin{array}{l} |x| - 7 > 0, \\ x^2 + 5x \leqslant 0; \end{array}\right.$ 6) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 5x + 20 \leqslant 0; \\ |x| - 1{,}5 \geqslant 0. \end{array}\right.$

C

5.52. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2}$; 2) $y = \sqrt{7x - 14} - \sqrt{x^2 - 15x + 56}$;

3) $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{3x - x^2}$; 4) $y = \dfrac{2}{x} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

5) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 12x - 7}}{x} - 6x$; 6) $y = \dfrac{\sqrt{15 - 19x + 6x^2}}{x - 1} + \dfrac{4}{x}$.

5.53*. При каких значениях a решения неравенства $x^2-(a^2-2a-3)\times$ $\times\, x-a^3+3a+2\leqslant 0$ расположены в промежутке $[2;\,4]$?

5.54. Решите неравенство $3x^2-b\leqslant ax$, если $a^2+12b<0$.

5.55. Решите неравенство $5x^2-ax+b>0$, если $b>0{,}05a^2$.

5.56. Ширина прямоугольника на 5 см меньше его длины. Какой должна быть ширина прямоугольника, чтобы его площадь была не меньше 36 см^2?

5.57. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2-2x+3>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

5.58. Равносильны ли неравенства:

1) $\dfrac{x-3}{x+1}\geqslant 0$ и $(x-3)(x+1)\geqslant 0$; 2) $\dfrac{x+5}{x-8}<0$ и $(x+5)(x-8)<0$?

5.59. При каких значениях a неравенство истинно для любого x: 1) $(x+4)^2>a$; 2) $(2x-3)^2\geqslant 3a-12$; 3) $4x^2-4x+1+a>0$; 4) $x^2-8x+a\geqslant 0$?

5.60. При каких значениях a уравнение имеет действительные корни: 1) $x^2+ax+7=0$; 2) $x^2-(a-2)x+1=0$?

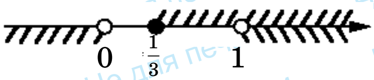
5.61. При каких значениях a уравнение имеет 2 различных корня: 1) $2x^2-ax+2=0$; 2) $x^2-(2-3a)x+1=0$?

5.62. Решите неравенство методом возведения в квадрат:

1) $|x+1|<3x-1$; 2) $|x-3|<6-2x$;

3) $|x-2|\geqslant 3x-1$; 4) $|2x+3|\leqslant x+4$.

3) ▲ $\Rightarrow \begin{cases} 3x-1\geqslant 0, \\ |x+1|^2<(3x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant\dfrac{1}{3}, \\ 8x^2-8x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant\dfrac{1}{3}, \\ 8x(x-1)>0 \end{cases}$



Ответ: $x\in(1;\,+\infty)$. ■

5.63. Решите совокупность неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l} x^2+x-6<0, \\ 3-2x-x^2>0; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 21x^2+39x-6<0, \\ 4x^2+5x>6; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} 2x^2+5x-25\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{1}{x-2}. \end{array}\right.$

Упражнения для повторения

5.64. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5(x+2)-9(x+1)-3<1-4(x+3), \\ 7(3+5x)<3x-5(x-2); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{4}>\dfrac{5x}{2}-\dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{2x+1}{4}<5-\dfrac{1-2x}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-1>3-5x, \\ 3x+2>3-4x, \\ 5x-3<2x+5. \end{cases}$

5.65. Решите уравнение методом возведения в квадрат:

1) $|2x-4|=10-5x;$ 2) $|-4-x|=\dfrac{3x}{2}+1.$

5.66. Если сумму цифр задуманного двузначного числа умножить на 6 и от полученного числа отнять 2, то получим задуманное число. Какое число задумано?

5.3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$\left.\begin{array}{l} f(x) \\ g(x) \end{array}\right\}$ – рациональные выражения.

$f(x) < g(x)$ – рациональное неравенство. Здесь можно использовать любой знак неравенства: $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

Например, $\dfrac{3x+2}{x-1}>0$, $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{2x+1}{x^2-1}$, $x^2+x-2\geqslant 0$, $\dfrac{3-2x}{x^2-3x+2}\leqslant 0$ – рациональные неравенства. При решении рациональных неравенств применяется метод интервалов. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим неравенство $\dfrac{x-2}{x+2}\geqslant\dfrac{2x-3}{4x-1}$.

▲ Область определения данного неравенства определяется неравенствами $x+2\neq 0$ и $4x-1\neq 0$, т.е. неравенствами $x\neq -2$, $x\neq\dfrac{1}{4}$. Теперь, записав данное неравенство в виде $\frac{x-2}{x+2}-\frac{2x-3}{4x-1}\geqslant 0$, приведем его к общему знаменателю:

$$\frac{(x-2)(4x-1)-(2x-3)(x+2)}{(x+2)(4x-1)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-5x+4)}{(x+2)(4x-1)}\geqslant 0.$$

Так как числа 1 и 4 являются корнями квадратного трехчлена x^2-5x+4, то, учитывая, что $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ и $4x-1=4(x-\frac{1}{4})$, последнее неравенство можно записать в виде $\frac{(x-1)(x-4)}{2(x+2)(x-\frac{1}{4})}\geqslant 0$. Чтобы применить метод интервалов, найдем точки -2; $\frac{1}{4}$; 1; 4, которые обращают в нуль множители в знаменателе или в числителе дроби в левой части неравенства. Эти точки делят числовую ось на 5 промежутков (рис. 5.10). В каждой из них исследуем знаки множителей и расставим знаки «+» и «–».

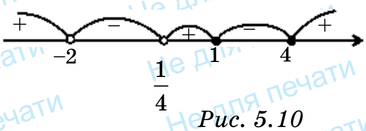


Рис. 5.10

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(\frac{1}{4};1]\cup[4;+\infty)$. ■

Пример 2. Рассмотрим правила применения метода интервалов с помощью неравенства

$$\frac{(x-1)^2\cdot x^3(x+0,5)}{(x-3)^5\cdot(x+2)^4}\geqslant 0.$$

▲ -2; $-0,5$; 0; 1; 3 – точки, обращающие в нуль один из множителей данного неравенства. Нанесем эти точки на числовую ось и исследуем знаки левой части неравенства. Эти знаки изображены на рис. 5.11.

Ответ: $x\in[-0,5;\,0)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)$. ■

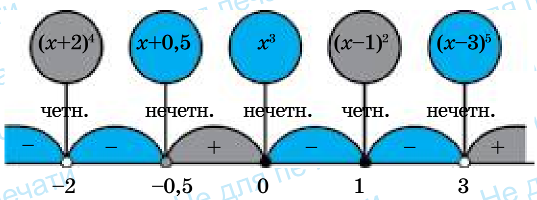


Рис. 5.11

Из этого примера видим, что при переходе через точку $x = a$ изменение знака выражения в левой части неравенства зависит от показателя степени двучлена $x - a$. А именно, если этот показатель степени – нечетное число, то выражение меняет свой знак при переходе через точку $x = a$, а если показатель степени – четное число, то выражение не меняет свой знак в окрестности точки $x = a$. Например, в окрестностях точек $x = -2$ и $x = 1$ изображены одинаковые знаки, так как показатели степеней $(x-1)^2$, $(x+2)^4$ четные. А в окрестностях точек $x = -0{,}5$, $x = 0$, $x = 3$ изображены разные знаки, так как показатели степеней x^3, $(x-3)^5$, $(x+0{,}5)$ нечетные.

1. Какие неравенства называются рациональными?
2. Как определяется область определения рационального неравенства?
3. Каков смысл метода интервалов?

Упражнения

А

В упражнениях **5.67–5.81** решите неравенства.

5.67. 1) $(x-1)(x+1)\leqslant 0$; 2) $x(7-x) > 0$;
3) $x^2(x-1)(x+2)\geqslant 0$; 4) $x^2(3-x)(x+1)\leqslant 0$;
5) $-x^2+5x+6\geqslant 0$; 6) $3x^2 - 7x + 2 < 0$.

5.68. 1) $\dfrac{x+2}{3-x} > 0$; 2) $\dfrac{x-10}{2-x} < 0$; 3) $\dfrac{1}{x-3}\leqslant -\dfrac{1}{10}$; 4) $\dfrac{3-2x}{x^2+3}\geqslant 1$.

5.69. 1) $\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^2+9x+20}{x+4} > 0$;
3) $\dfrac{x^2-6x}{4-3x-x^2}\geqslant 0$; 4) $\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+x+1} < 0$.

1) ▲ $\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}\leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x(x-6)}{(x-3)^2}\leqslant 0.$

Ответ: $[0;\,3)\cup(3;\,6]$ ■

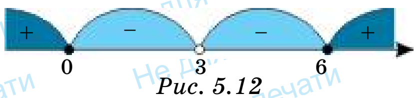


Рис. 5.12

5.70. 1) $\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{x-1}{x+5}\geqslant 2$; 3) $\dfrac{x^2-36}{x^2+6x} < 0$; 4) $\dfrac{x-1}{x+3} > 3$.

5.71. 1) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+2}>0;$ 2) $\dfrac{(2x-3)(3x-17)}{(x+1)(x+4)}\leqslant 0;$

3) $\dfrac{(1-x)(x+1)}{x(5x+1)}\geqslant 0;$ 4) $\dfrac{(2-x)(3+2x)}{x(1-x)}<0.$

5.72. 1) $\dfrac{2x^2+16x-3}{x^2+8x}>2;$ 2) $\dfrac{2x^2+x-1}{5x+x^2+7}>0;$

3) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}<0;$ 4) $\dfrac{x^4+x^3+3}{-x^2+x+2}>0.$

4) ▲ $x^4+x^3+3>0$ верно при любых значениях x, т.к. если $|x|>1$, то $x^4>x^3$, если $|x|<1$, то $x^3<3$; $-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{1}{-(x+1)(x-2)}>0$ или неравенству $(x+1)(x-2)<0$. Ответ: $(-1;\ 2)$. ■

5.73. 1) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0;$ 2) $\dfrac{(x^3-64)(-x^2-1)}{x^3+1}\geqslant 0;$

3) $\dfrac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2-x+1}\leqslant 0;$ 4) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4}\geqslant 0.$

5.74. 1) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}\geqslant\dfrac{1}{x};$ 2) $\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{x+7}\leqslant 0;$

3) $1+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}\geqslant\dfrac{5}{4};$ 4) $\dfrac{(x+6)^3(x+4)}{(2-x)^6}\geqslant 0.$

1) ▲ $\Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\geqslant 0\Rightarrow\dfrac{(x+1)(x+2)+x(x+2)-x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}\geqslant 0\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{x^2+4x+2}{x(x+1)(x+2)}\geqslant 0.$ Корни уравнения $x^2+4x+2=0$ является отрицательными числами: $x_1=-2-\sqrt{2}$, $x_2=-2+\sqrt{2}$.

$\Rightarrow\dfrac{\left(x+2+\sqrt{2}\right)\left(x+2-\sqrt{2}\right)}{x(x+1)(x+2)}\geqslant 0.$

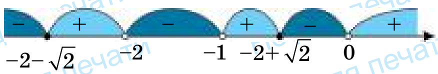


Рис. 5.13

Ответ: $[-2-\sqrt{2};\ -2)\cup(-1;\ -2+\sqrt{2}\,]\cup(0;\ +\infty)$. ■

B

5.75. 1) $\dfrac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x^2)}>0$; 2) $\dfrac{(x-1)^3}{(5x+10)^2(-1-3x)}<0$;

3) $\dfrac{x^2(6-x)^3(x+3)}{(x+7)^5}\geqslant 0$; 4) $\dfrac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}\leqslant 0$.

5.76. 1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{1}{x+2}$; 2) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}>\dfrac{3}{x-1}$;

3) $\dfrac{6}{x-1}\leqslant\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$; 4) $\dfrac{21}{x+1}<\dfrac{16}{x-2}-\dfrac{6}{x}$.

5.77. 1) $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}<\dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$;

2) $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leqslant\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$;

3) $\dfrac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9}>\dfrac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$;

4) $\dfrac{(x^2-6x+9)(3x^2-2x-1)}{5-x}>\dfrac{(x^2-6x+9)(2+2x-4x^2)}{5-x}$.

5.78. 1) $\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)^2>0$; 2) $\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{6}{x-2}+9>0$;

3) $(x+3)^2+(x^2+6x+9)^{-1}>2$; 4) $x^2+\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-2x+1}>\dfrac{8x-2x^2}{x-1}$.

5.79. 1) $\dfrac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x+2)^2(5-x)}\geqslant 0$; 2) $\dfrac{(x^2+2x-8)(x^3-4x)}{x^2+7x+10}>0$.

5.80. 1) $\dfrac{(2x^2+4x)(3x-x^2)}{(2x+5)^3}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^2-2x-1}{(2x-5)(x+2)^2}<0$.

5.81. 1) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-1}\leqslant 1$; 2) $3x+\dfrac{x-1}{2x-1}\geqslant\dfrac{2x^2-1}{2x-1}$.

5.82. Найдите сумму всех целых решений неравенства:

1) $\dfrac{x^3+2x^2+7}{7-x}\geqslant 1$; 2) $\dfrac{x^3+17x}{x+8}\leqslant 2x$.

C

5.83. Найдите все целые значения x, удовлетворяющие неравенству $1 \leqslant \dfrac{5x-8}{2x+1} \leqslant 2$.

5.84. При каких значениях x график функции $y = \dfrac{x-13}{x^2+x-6}$ расположен на полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$?

5.85. При каких значениях x график функции:

1) $y = 1 - \dfrac{4}{x-2}$ расположен ниже графика функции $y = \dfrac{5}{x^2-4x+4}$;

2) $y = \dfrac{2}{x-3}$ расположен выше графика функции $y = \dfrac{8}{x^2-6x+9} - 1$?

5.86. Решите неравенство:

1) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| \geqslant 1$; 2) $\left|\dfrac{2x-1}{x-2}\right| > 2$.

5.87. Решите неравенство:

1) $x^2 - 2x - 8 < 7|x-4|$; 2) $|x-2x^2| > 2x^2 - x$.

5.88. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2} - \dfrac{x}{3} \geqslant \dfrac{2-x}{6}, \\ x \geqslant 1 - \dfrac{1+8x^2}{x-4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2-7}{2} > 1, \\ \dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{6-x}{2} \geqslant 2x - 7. \end{cases}$

5.89. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x \leqslant 3 - \dfrac{1}{x-1}, \\ |x+1| < 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2} \geqslant 0, \\ |5-x| \leqslant 2. \end{cases}$

5.90. Найдите все решения неравенства $\dfrac{x^2-4x}{x-1} \leqslant 0$, которые удовлетворяют неравенству $(x^2-1)(3-x) \geqslant 0$.

Упражнения для повторения

5.91. Принадлежит ли число 10 области значений функции $y = \sqrt{x^2 - 2x + 12}$?

5.92. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$; 2) $y = \sqrt{x(x-4)}$.

Раздел 6*. Дополнительные материалы. Действительные числа

Изучив материалы данного раздела, мы достигнем следующих целей:

- будем доказывать признаки делимости целых чисел и применять их;
- будем знать свойства простых и составных чисел, находить НОД и НОК;
- будем знать деление целых чисел с остатком и применять алгоритм Евклида;
- будем иметь представление о неопределенных уравнениях, решать линейные неопределенные уравнения;
- будем знать и применять принцип Дирихле.

6.1*. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ

Натуральные числа и их свойства

Вы это знаете

Числа, используемые для счета объектов, называются **натуральными числами.**

Любое натуральное число записывается с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Располагая натуральные числа в порядке возрастания, получим последовательность 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Эту последовательность называют рядом натуральных чисел, или натуральным рядом.

Любое n-значное натуральное число a можно представить в виде:

$$a = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n \qquad (1)$$

Здесь натуральное число a записано с помощью цифр a_1, a_2,..., a_n. Это число коротко записывают так: $a = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$.

$428 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$,

$1403 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3$,

$2837 = 2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 310 + 7$ и т. д.

Замечание. Рассматриваемая нами система счисления называется **десятичной системой счисления,** т. к. каждое число может быть записано с помощью десяти цифр. Вообще, существуют и другие системы счисления. Например, в Древнем Вавилоне до нашей эры существовала шестидесятиричная система счисления, влияние которой сохранилось до сих пор: деление одного часа на 60 минут, деление окружности на 360 градусов и т. п. В наши дни в электронно-вычислительных устройствах применяется двоичная система счисления.

В арифметике рассматривают следующие операции над числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и т.д. Их называют **арифметическими операциями.** Во множестве натуральных чисел выполняются тольке две арифметические операции: сложение и умножение. Другими словами, при сложении или умножении любых двух натуральных чисел получается натуральное число. А при применении операции вычитания или деления не всегда получаются натуральные числа. Например, числа -3 и $\frac{2}{5}$, полученные при вычитании и делении натуральных чисел ($2-5=-3,\ 2:5=\frac{2}{5}$), не являются натуральными числами.

Сложение и умножение натуральных чисел удовлетворяют законам, изложенным ниже.

Вы это знаете

Закон коммутативности	
$a+b=b+a$ $a \cdot b = b \cdot a$	От перестановки мест слагаемых (сомножителей) сумма (произведение) не меняется.
Закон ассоциативности	
$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(ab)c=a(bc)$	Соседние слагаемые (сомножители) можно сгруппировать скобками.
Закон дистрибутивности	
$(a+b)c=ac+bc$	Правило раскрытия скобок.

Признаки делимости чисел

Если для заданных чисел a и b найдется такое число c, что имеет место равенство $a = b \cdot c$, то говорят, что a делится на b без остатка. То, что a делится на b без остатка, записывают так: $a \vdots b$. Здесь a

называется делимым, b – делителем, а c – частным. Например, так как $12 = 4 \cdot 3$, то 12 делится на 4 без остатка.

Теперь приведем признаки делимости на некоторые числа.

1) Признак делимости на 2. *Если значение последней цифры числа является нулем или четным числом, то это число делится на 2 без остатка.*

2) Признак делимости на 4. *Если число оканчивается двумя нулями или значение двух последних цифр данного числа делится на 4, то это число делится на 4 без остатка.*

3) Признак делимости на 5. *Если число оканчивается на цифру 0 или 5, то это число делится на 5 без остатка.*

4) Признак делимости на 3 (на 9). *Если сумма значений цифр числа делится на 3 (на 9), то это число делится на 3 (на 9) без остатка.*

Следствие (признак делимости на 6). *Четное и кратное трем число делится на 6 без остатка.*

5) Признак делимости на 11. *Если разность между суммой значений цифр, расположенных на нечетных местах числа, и суммой значений цифр, расположенных на четных местах, равна нулю или кратна 11, то это число делится на 11 без остатка.*

Для образца покажем доказательство признаков 2), 4) и 5). Другие признаки доказываются аналогично.

▲**Доказательство признака 2).** Данное число запишем в виде

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}a_{n-1}a_{?}} = \overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}} \cdot 100 + \overline{a_{n-1}\,a_n}.$$

Здесь первое слагаемое делится на 100 и поэтому делится и на 4. Тогда необходимо, чтобы $\overline{a_{n-1}\,a_n}$ было равно нулю или делилось на 4. ■

▲ **Доказательство признака 4).** Данное число запишем в виде:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10 + a_n.$$

Учитывая, что $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$ и т. д., имеем:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1\left(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{n-1}+1\right) + a_2\left(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{n-2}+1\right) + \ldots + a_{n-1}(9+1) + a_n =$$

$$= a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1} + a_2 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 9 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n).$$

Здесь слагаемые, содержащие цифру 9, делятся на 9 (на 3). Тогда необходимо, чтобы сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ делилась на 9 (на 3). ■

Доказательство признака 5). ▲ Пусть данное число составлено с помощью четного количества цифр. (Случай, когда число составлено из нечетного количества цифр, доказывается аналогично.) Тогда

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{2n}} = a_1 10^{2n-1} + a_2 10^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}\cdot 10 + a_{2n} = a_1(10^{2n-1} + 10^{2n-2}) + (a_2-a_1)10^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}10 + a_{2n} = a_1\cdot 11\cdot 10^{2n-2} + (a_2 - a_1)(10^{2n-2} - 10^{2n-3}) + (a_3 - a_2 + a_1)\cdot 10^{2n-3} + \ldots + a_{2n-1}10 + a_{2n} = \ldots = a_1\cdot 11 \times 10^{2n-2} + (a_2-a_1)\cdot 11\cdot 10^{2n-3} + (a_3 - a_2 + a_1)\cdot 11\cdot 10^{2n-4} + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n-2} + \ldots - a_2 + a_1)\cdot 11 + (a_{2n} - a_{2n-1} + a_{2n-2} - \ldots + a_2 - a_1).$$

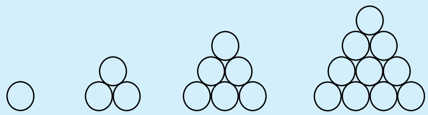
Отсюда, чтобы данное число делилось на 11, необходимо, чтобы число $a_{2n}-a_{2n-1}+a_{2n-2}-\ldots+a_2-a_1 = (a_2+a_4+\ldots+a_{2n}) - (a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1})$ делилось на 11 или было равно нулю. ■

Творческая работа

Признаки 1, 3 докажите самостоятельно.

Асан на летних каникулах гостил у дедушки. Однажды, когда он ел черешню, то из косточек начал составлять фигурки, указанные на рисунке.

1) Сколько косточек содержит его 5-я фигурка?



1 3 6 10

2) Сколько косточек может содержать n-я фигура? Выразите это число через n. В древности представители школы Пифагора изучали подобные числа и называли их *фигурными числами*. Например, на рисунке изображены *треугольные числа*.

3) Что вы можете сказать о числах, которые можно изобразить в виде ромба?

4) Как можно составлять *шестиугольные числа*?

5) Покажите, как можно определить величину n-го члена *четырехугольных* и *шестиугольных чисел*.

Упражнения

A

6.1. Применяя закономерности операций сложения и умножения, вычислите устно:

1) $345 + 73 + 18 + 235 + 2$; 2) $25 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 250$;
3) $4 \cdot 7 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 125$; 4) $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99$.

6.2. Среди чисел 1581, 2874, 89751, 2890, 9745, 12387, 2835, 78,33, 4456 найдите те, которые делятся на 3 без остатка.

6.3. Из чисел 2835, 1575, 7333, 5874, 10304, 37571, 4456 выпишите те, которые делятся на 9 без остатка.

B

6.4. Сформулируйте и докажите признак делимости на 25.

6.5. Сформулируйте и докажите признак делимости на 10.

6.6. На какую цифру оканчивается произведение $91 \cdot 92 \cdot \ldots \times \times 98 \cdot 99$?

6.7. Какую цифру нужно записать вместо буквы a, чтобы число делилось на 9 без остатка: 1) $5431a$; 2) $6547a$?

6.8. Какую цифру нужно записать вместо буквы c, чтобы число $28c$ делилось на 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11 без остатка?

6.9. Докажите, что разность: 1) $ab - ba$; 2) $abc - cba$

3) $\overline{a_1a_2\ldots a_k} - \overline{a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1}$ кратна 9.

6.10. При каких значениях цифры c число: 1) $123c$; 2) $3120c$ кратно 11?

6.11. Покажите, что при всех натуральных значениях m, p и четных n значение выражения $24m + 3n + 6p$ делится на 6 без остатка.

C

6.12. Докажите, что одно из двух последовательных четных чисел кратно 4.

6.13. Найдите двузначное число, равное утроенной сумме своих цифр.

6.14. Найдите двузначное число, равное удвоенному произведению своих цифр.

6.15*. Найдите двузначное число, равное утроенному произведению своих цифр.

6.16*. Сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел равна 135. Найдите эти числа.

6.17*. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть полным квадратом.

6.18*. Найдите все двузначные числа $\overline{ab}$ $(a > b)$, такие, что разность $\overline{ab} - \overline{ba}$ является полным квадратом.

6.19. Покажите, что число: 1) $41^{10}-1$ кратно 10; 2) $46^{46}-1$ кратно 5; 3) $67^{8}-1$ кратно 10; 4) $89^{26}-45^{25}$ кратно 2.

6.20*. Если от трехзначного числа, кратного 45, отнять трехзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получим число, равное 297. Найдите это число.

6.2. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Простые и составные числа

Все натуральные числа, кроме единицы, по меньшей мере делятся на два числа без остатка: на 1 и само на себя. Число, кроме единицы, которое делится только на единицу и само на себя, называется простым. Число, которое делится не только на единицу и само на себя, но еще и на другие числа, называется составным. Число 1 не является ни простым, ни составным. Например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... – простые числа. Здесь 2 – единственное четное простое число.

В свое время Евклид (III в. до. н. э.) доказал, что множество простых чисел бесконечно. Приведем это доказательство.

Пусть множество простых чисел является конечным. Тогда их можно записать в порядке возрастания:

$$2,\ 3,\ 5,\ \dots,\ p. \qquad (1)$$

Таким образом, будем считать, что в список (1) вошли все простые числа и других простых чисел нет. Тогда рассмотрим число:

$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Возможно существование двух вариантов: либо a – простое число, либо a – составное число.

Число a не может быть простым, ибо оно не вошло в список (1).

С другой стороны, число a не делится ни на одно из простых чисел (1), т. е. число a не имеет простых делителей и тем самым не может быть составным числом. Итак, число a не является ни составным, ни простым. Таким числом может быть лишь 1. Но $a \neq 1$. Полученное противоречие опровергает наше предположение о том, что множество простых чисел конечно. Это значит, что множество простых чисел бесконечно.

Основная теорема арифметики. Каноническое разложение натурального числа

Каждое составное число можно разложить на произведение простых множителей. Например, $252 = 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7$, или $252 = 2^2\cdot3^2\cdot7$. Отсюда видим, что некоторые простые числа в качестве множителей могут повторяться несколько раз. Теорему, данную ниже, приведем без доказательства.

Теорема (основная теорема арифметики). ***Каждое натуральное число, кроме единицы, единственным способом разлагается на простые множители.***

Пусть число a разложено на простые множители. Объединяя одинаковые множители, число a можно представить в таком виде:

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}, \tag{2}$$

где p_1, p_2, ..., p_k – различные простые числа, называемые простыми делителями числа a, n_1, n_2, ..., n_k – неотрицательные целые числа. Запись числа в виде (2) называют его **каноническим разложением.** Например, $1176 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot7 = 2^3\cdot3\cdot7^2$.

В целом, определение канонического разложения числа (особенно, если это число очень большое) является очень сложной и трудной задачей. Например, только в наши дни с помощью ЭВМ смогли определить, что число $2^{19937} - 1$ является простым и для записи этого числа потребуется свыше 60 000 цифр.

Однако не очень большие числа можно разложить на простые множители. Покажем это на примерах.

Пример 1. Разложим числа 612 и 1080 на простые множители.

612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	1

1080	2
540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	1

Итак, $612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$ и $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Упражнения

A

6.21. Выпишите все простые числа от 1 до 100.

6.22. Выпишите все составные числа от 1 до 50.

6.23. Из чисел 28, 44, 27, 43, 67, 75, 1684, 546, 79, 740, 1001, 1036, 31, 885, 83 выпишите все простые числа.

6.24. Напишите 1) 2; 2) 3; 3) 4 составных числа, не имеющих общих делителей.

6.25. Найдите каноническое разложение чисел 100, 216, 360, 310, 4608, 3240.

6.26. Найдите все простые делители чисел 180, 612, 972, 1225, 2304, 2463, 11440.

6.27. Определите наименьший и наибольший простые делители чисел 234, 510, 1449, 3190, 2220, 3690, 1593.

B

6.28. Покажите, что числа 6, 28 и 196 равны сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа.

6.29. Определите все делители чисел 12, 75, 56, 72, 108, 120.

6.30. В коробке менее 300, но более 200 карандашей. Сколько карандашей в коробке, если известно, что количество всех карандашей кратно 10 и 12?

12–3458

C

6.31. Покажите, что число $p^2 - 1$ делится на 24 без остатка, если $p \geqslant 5$ – простое число.

6.32. Докажите, что если вычесть 1 из квадрата числа, не кратного 3, то получим число, кратное 3.

6.33*. Обозначим через $\tau(a)$ количество всех делителей числа a, включая 1 и само число a. Например, так как $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, то это число имеет следующие делители: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Тогда $\tau(24) = 8$.

Докажите, что $\tau(a) = (n_1 + 1)(n_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(n_k + 1)$, если $a = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$.

6.34*. Найдите число a, если известно, что a кратно 12 и $\tau(a) = 14$.

6.35*. Если $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$, $\tau(a^2) = 81$, то чему равно $\tau(a^3)$?

6.36*. Чему равно a, если $a = 2\tau(a)$?

6.37*. Найдите все простые числа p и q, удовлетворяющие равенству $p^2 - 2q^2 = 1$.

6.38. Покажите, что трехзначное число, записанное одинаковыми цифрами, кратно 37.

6.39. Рассмотрите произвольное трехзначное число и число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Покажите, что разность этих чисел кратна: а) 198; б) 9.

6.40. Покажите, что если вычесть 1 из квадрата нечетного числа, то получим число, кратное 8.

6.41. Докажите, что разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8.

6.42. Покажите, что любое число, составленное из четного количества одинаковых цифр, делится на 11.

6.3. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ. ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Если числа a и b делятся на число d без остатка, то число d называется **общим делителем** чисел a и b. Например, для чисел 108 и 144 числа

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 и 36 являются общими делителями. Аналогично определяется общий делитель нескольких чисел. Например, числа 1, 2, 3, 4, 6 являются общими делителями чисел 24, 66 и 84.

Если два или несколько чисел не имеют общих делителей, кроме 1, то такие числа называются **взаимно простыми числами.** Например, числа 35 и 169 являются взаимно простыми.

Любые два числа a и b могут иметь лишь конечное число общих делителей. Наибольшее из общих делителей чисел a и b называют **наибольшим общим делителем** (коротко НОД) этих чисел. НОД чисел a и b обозначают так: **НОД** (a, b) или (a, b). Например, НОД рассмотренных выше чисел обозначают так: $(108, 144) = 36$, $(35, 169) = 1$. НОД нескольких чисел обозначается так же: $(24, 66, 84) = 6$.

Чтобы найти НОД нескольких чисел, надо разложить каждое из этих чисел на простые множители (каноническое разложение чисел), затем составить произведение общих множителей, взятых с наименьшими показателями, встречающимися в этих разложениях. Значение этого произведения и будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Пример 1. Найдем НОД чисел 680 и 612.

▲Так как $680 = 2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot17 = 2^3\cdot5^2\cdot17$, $612 = 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot17 = 2^2\cdot3^2\cdot17$, то НОД данных чисел запишем так: $(680, 612) = 2^2\cdot17 = 68$. ■

Пример 2. Найдем НОД чисел 150, 180 и 240.

▲ $150=2\cdot3\cdot5^2$, $180=2^2\cdot3^2\cdot5$, $240=2^4\cdot3\cdot5$. Отсюда видим, что числа 2, 3 и 5 являются общими множителями данных чисел. Поэтому НОД данных чисел запишем так: $(150, 180, 240) = 2\cdot3\cdot5 = 30$. ■

Если число k делится на числа a и b, то число k называется **общим кратным** чисел a и b. Например, произведение ab является общим кратным чисел a и b. Наименьшее из общих кратных чисел a и b называют **наименьшим общим кратным** (коротко НОК) этих чисел. НОК чисел a и b обозначают так: $[a, b]$. НОК нескольких чисел обозначают так же: $[a, b, c, ..., f]$.

Чтобы найти НОК нескольких чисел, надо разложить каждое из этих чисел на простые множители **(каноническое разложение чисел)**, затем составить произведение общих множителей, взятых с наибольшими показателями, встречающимися в этих разложениях. Значение этого произведения и будет наименьшим общим кратным данных чисел.

Пример 3. Найдем НОК чисел 680 и 612.

▲ Так как $680 = 2^3\cdot5\cdot17$, $612 = 2^2\cdot3^2\cdot17$, то НОК данных чисел запишем так: $[680, 612] = 2^3\cdot5\cdot17\cdot3^2 = 6120$. ■

Свойства общих делителей и общих кратных

Приведем некоторые свойства НОД и НОК чисел.

1⁰. Если число d является общим делителем чисел a и b, то число $k=\dfrac{ab}{d}$ будет общим кратным чисел a и b.

▲ Так как d является общим делителем чисел a и b, то найдутся числа a_1 и b_1, такие, что $a = a_1 d$, $b = b_1 d$. Тогда $k=\dfrac{ab}{d}=\dfrac{a_1 d\cdot b_1 d}{d}=$ $=a_1 d b_1 = a_1(db_1)=a_1 b$. По определению частного k делится на b без остатка. Аналогично, $k = a_1 d b_1 = (a_1 d)b_1 = ab_1$, т. е. число k делится и на a. Поэтому k является общим кратным чисел a и b. ■

Вообще, если число a делится на число b без остатка, то пишут $a \,\vdots\, b$. Например, $24 \,\vdots\, 8$.

2⁰. Для любых чисел a и b верно равенство

$$(a,b)=\frac{ab}{[a,b]}.$$

▲ Пусть $\dfrac{ab}{[a,b]}=d$, поскольку $ab = [a,b]\cdot d$ и по свойству 1° d является натуральным числом. Так как $[a,b] \,\vdots\, b$, то $a\cdot[a,b] \,\vdots\, ab$. Тогда из равенства $d\,[a,b]=ab$ имеем, что $a\cdot[a,b] \,\vdots\, d\cdot[a,b]$. Отсюда получим, что $a \,\vdots\, d$. Аналогично можно показать, что $b \,\vdots\, d$, т. е. число d является общим делителем чисел a и b.

Теперь покажем, что число d является НОД чисел a и b. Если это не так, то найдется общий делитель d_1 чисел a и b, такой, что $d_1 > d$. Тогда по свойству 1° число $k_1=\dfrac{ab}{d_1}$ является общим кратным чисел a и b. Так как $d_1 > d$, то $k_1 < [a,b]$, т.е. мы нашли общее кратное k_1 чисел a и b, меньшее НОК этих чисел. Это противоречие показывает, что числа a и b не могут иметь общих делителей, больших, чем d, т.е. $d = (a, b)$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 1. Для любых чисел a и b верно равенство $[a, b]\cdot(a, b) = ab$.

Следствие 2. Если $(a, b) = 1$, то $[a, b] = ab$.

3⁰. НОД чисел a и b делится на любой другой общий делитель чисел a и b без остатка.

▲ Если число d_1 является общим делителем чисел a и b, то по свойству 1° число $k_1 = \dfrac{ab}{d_1}$ будет общим кратным чисел a и b. Поэтому, т. е. существует число m, такое, что $k_1 = m\cdot[a, b]$. Тогда, учитывая равенство $[a, b] = \dfrac{ab}{(a,b)}$, получим равенство $\dfrac{ab}{d_1} = \dfrac{mab}{(a,b)}$, или $ab(a, b) = abmd_1$. Отсюда $(a, b) = md_1$, т.е. $(a, b) \vdots d_1$. ■

4⁰. Если $a \vdots n$, $a \vdots m$ и $(n, m) = 1$, то $a \vdots nm$.

▲ Из условия свойства имеем, что число a является общим делителем чисел m и n. Так как $(m, n) = 1$, то на основании следствия 1 выполняется равенство $[n, m] = nm$ и поэтому $a \vdots [m, n]$, т. е. $a \vdots m \cdot n$. ■

Теперь рассмотрим важное свойство, необходимое для разложения числа на простые множители. Нам придется воспользоваться символом квадратного корня $\sqrt{\ }$, с которым мы познакомились в разделе 1. Здесь мы ограничимся примерами. Например, так как $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, то соответственно $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$ и т. д. Число 137 не является точным квадратом. Но мы знаем, что $11^2 = 121 < 137 < 144 = 12^2$. Поэтому $11 < \sqrt{137} < 12$. Вообще $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ и $\sqrt{b^2} = |b| = b$.

5⁰. Если число a не делится ни на одно простое число, меньшее $\sqrt{a}$, то a – простое число.

▲ Если p – наименьший простой делитель числа a, то верно неравенство $p \leqslant \sqrt{a}$. Действительно, если p – наименьший простой делитель числа a, то существует число $b \geqslant p$, такое, что $a = bp$. Отсюда $p^2 = p \cdot p \leqslant bp = a$, т.е. $p \leqslant \sqrt{a}$. Если число a не имеет простых делителей, меньших $\sqrt{a}$, то это число не имеет простых делителей, меньших a, т. е. a является простым числом. ■

Пример 4. Каким числом является число 137: простым или составным?

▲ $11 < \sqrt{137} < 12$. Поэтому простые числа 2, 3, 5, 7, 11 меньше $\sqrt{137}$. Но число 137 не делится ни на одно из них. Следовательно, число 137 – простое. ■

Упражнения

A

6.43. Найдите НОД чисел:

1) 96 и 34; 2) 105 и 135; 3) 360 и 252;
4) 436 и 729; 5) 232 и 132; 6) 320 и 1152.

6.44. Вычислите:

1) (220, 138); 2) (344, 476);
3) (78, 15); 4) (891, 33);
5) (335, 490); 6) (1122, 121).

6.45. Найдите:

1) (204, 230, 170); 2) (224, 168, 392);
3) (108, 126, 882); 4) (112, 124, 420).

6.46. Назовите несколько чисел, кратных числам: 1) 3; 2) 15; 3) 12 и 5; 4) 12 и 3; 5) 6 и 10.

B

6.47. Докажите, что $(a_1b_1) = 1$, если $a = a_1d$, $b = b_1d$, $(a,b) = d$.

6.48. Докажите равенство $[a,b,c]=[[a,b],c]$.

6.49. Докажите равенство $(a, b, c) = ((a, b), c)$.

6.50. Приведите к общему знаменателю дроби $\frac{7}{192}$ и $\frac{187}{1620}$.

6.51. Можно ли устно определить остаток от деления числа 27 346 на число: 1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 11? Запишите остаток от деления.

6.52. Назовите устно остаток от деления числа 59 142 727 346 на число: 1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 25.

6.53. Определите все делители наибольшего трехзначного числа.

6.54. Докажите равенство $[a_1,b_1]=a_1b_1d$, если $a = a_1d$, $b = b_1d$, $(a, b) = d$.

6.55. Найдите a и b по следующим данным:

1) $a : b = 11:13$, $(a, b) = 5$;
2) $(a, b) = 5$, $[a, b] = 105$;
3) $(a, b) = 7$, $ab = 294$;
4) $[a, b] = 75$, $ab = 375$;
5) $[a, b] = 915$, $(a, b) = 3$;
6) $a : b = 17:14$, $(a, b) = 3$;
7) $[a, b] = 224$, $a : b = 7:8$;
8) $a : b = 9:14$, $(a, b) = 378$;
9) $a : b = 5 : 6$, $(a, b) = 13$.

6.56. Найдите все делители произведения: 1) $2\cdot3\cdot5$; 2) $2\cdot5\cdot7$; 3) $3\cdot7\cdot11$.

6.57. Найдите каноническое разложение $a\cdot b$, (a, b) и $[a, b]$, если $a = 2^5\cdot3^4\cdot5^2\cdot11$, $b = 2^3\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2$.

6.58. Напишите все числа, меньшие 10 и взаимно простые с числом 10.

6.59. Напишите все числа, меньшие 12 и взаимно простые с 12.

C

6.60. Сколько делителей имеет число $a = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}$ (в том числе 1 и само число), если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – простые числа, а $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – натуральные числа?

6.61. Докажите, что число $n^4 + 4$ при любом целом n является составным числом.

6.62. Длина окружности переднего колеса телеги равна 225 см, а заднего – 325 см. Через какое минимальное расстояние (в метрах) оба колеса телеги сделают по целому количеству полных оборотов?

6.63. Четыре скакуна одновременно в одном направлении стартовали по круговой беговой дорожке. Через какое время все четыре скакуна снова встретятся на стартовой линии, если известно, что первый скакун пробегает круг за 20 мин, второй – за 15 мин, третий – за 12 мин, а четвертый – за 10 мин?

6.64. Первый теплоход вернулся в порт после 3-дневного, второй – после 4-дневного, третий – после 5-дневного круиза. Известно, что они встретились в порту в понедельник. Через какое минимальное количество дней встретятся в порту: 1) первый и вт рой теплоходы; 2) первый и третий теплоходы; 3) второй и третий теплоходы; 4) все три теплохода? В какие дни недели произойдут эти встречи?

6.65*. Известно, что сумма $ab + cd$ делится на $a - c$. Покажите, что и сумма $ad + bc$ делится на $a - c$.

6.66*. Докажите, что $(c, d) \vdots m$, если известно, что $(a, m) = 1$, $(ad - bc) \vdots m$, $(a - b) \vdots m$.

6.67. Докажите, что два последовательных нечетных числа являются взаимно простыми.

6.68. Покажите, что НОД двух последовательных четных чисел равен 2.

6.69. Покажите, что число $2^n - 1$ составное, если число n составное.

6.70*. Докажите, что если число $n!$ не делится на $n + 1$, то число $n + 1$ простое. Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читается: *эн факториал*).

6.4. ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ С ОСТАТКОМ

Действие вычитания. Целые числа

Если для чисел a, b и x выполнено равенство

$$b + x = a, \tag{1}$$

то $x = a - b$ называется разностью чисел a и b. Здесь a – уменьшаемое, b – вычитаемое. В целом, процесс нахождения разности называют действием вычитания из числа a числа b.

Для любых натуральных чисел a и b не всегда удается найти натуральное число x, удовлетворяющее равенству (1). Если $a > b$, то число x существует и оно будет единственным, т.е. для того чтобы уравнение (1) имело решение во множестве натуралных чисел, необходимо выполнение неравенства $a > b$. В противном случае решениями уранения (1) не являются натуральные числа. Например, значение разности $3 - 5$ не является натуральным числом. Поэтому возникает необходимость расширения множества натуральных чисел.

Введем новые числа: 0 (нуль) и $(-n)$ – числа с отрицательными знаками. Здесь n – натуральное число. Число $-n$ называют отрицательным целым числом. Иногда число $-n$ называют числом, противоположным числу n.

Если натуральные числа m и n равны, то и целые числа $-m$ и $-n$ равны. Теперь рассмотрим множество, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех целых отрицательных чисел. Это множество называется **множеством целых чисел** и обозначается $\boldsymbol{Z}$. Итак, множество $\boldsymbol{Z}$ состоит из чисел вида:

$$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots . \qquad (2)$$

Любой элемент этого множества называют целым числом. Во множестве целых чисел определены действия сложения, вычитания и умножения чисел.

Если a и b – положительные числа, то справедливы нижеследующие равенства:

$a - b = a + (-b)$; $a - (-b) = a + b$; $a + 0 = 0 + a = a$;

$(-a)b = a(-b) = -ab$; $(-a)(-b) = ab$; $(-1)a = -a$;

$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$; $a^0 = 1$, $a \neq 0$

Основные законы сложения и умножения натуральных чисел остаются справедливыми и для целых чисел. Во множестве целых чисел определено также действие деления. Если во множестве Z действия сложения, вычитания и умножения всегда выполняются, то в результате деления целых чисел не всегда получается целое число. Например, значение частного 5 : 7 не является целым числом.

Деление целых чисел с остатком. Алгоритм Евклида

Во множестве целых чисел выполняется деление целых чисел с остатком.

Определение. Если для целого числа a и натурального числа b найдутся целые числа q и r $(0 \leqslant r < b)$, такие, что выполняется равенство $a = bq + r$, то говорят, что число a делится с остатком r на число b.

Если $r = 0$, то говорят, что число a делится на число b без остатка.

Теорема. ***Для любого целого числа a и натурального b существуют единственные числа q и r*** $(0 \leqslant r < b)$***, такие, что верно равенство***

$$a = bq + r. \qquad (1)$$

Эту теорему приводим без доказательства.

Следствие:

а) любое четное число n можно представить в виде $n = 2k$, где k – целое число;

б) любое нечетное число n можно представить в виде $n = 2k + 1$. Здесь k – целое число.

Материалы из истории

Евклид (III в. до нашей эры) – греческий математик, живший в Александрии. Евклид в своем знаменитом труде «Начала» (15 книг), обобщив и собрав воедино все известные к тому времени факты, построил геометрию на строго аксиоматической основе. Эти труды оказались настолько удачными, что после него все математики изучали геометрию именно по его «Началам» на протяжении 20 веков.

Для того чтобы найти НОД небольших чисел, пользуются их каноническим разложением. Задача разложения больших чисел на простые множители относится к числу весьма трудных. В таких случаях пользуются алгоритмом Евклида. В алгоритме Евклида применяется деление чисел с остатком. Сначала докажем следующую теорему.

Теорема. ***Если $a = bq + r$, то верно равенство $(a, b) = (b, r)$.***

▲ Возможно, либо $r = 0$, либо $r \neq 0$.

1) Если $r = 0$, то $a = bq$, т.е. a делится на b без остатка. Поэтому $(a, b) = b = (b, 0) = (b, r)$ и тем самым теорема доказана.

2) Пусть $r \neq 0$ и $d = (b, r)$. Так как $bq \vdots d, r \vdots d$, то число $a = bq + r$ также делится на d без остатка. Тогда d есть общий делитель чисел a и b. Теперь покажем, что $d = (a, b)$.

Докажем методом от противного. Пусть числа a, b имеют общий делитель d_1, такой, что $d_1 > d$. Так как $a \vdots d_1, b \vdots d_1$, то и число $r = a - bq$ также делится на d_1 без остатка. Тогда число d_1 является общим делителем чисел b и r, причем $d_1 > d = (b, r)$. Это противоречит тому, что d является наибольшим общим делителем чисел b и r. Это противоречие доказывает, что $d = (a, b)$. ■

Теперь приведем алгоритм Евклида для нахождения НОД чисел a и b. Пусть $a \geqslant b$. Если $a \vdots b$, то $(a, b) = b$. Если же при делении числа a на b образуется остаток r, то по доказанной теореме $(a, b) = (b, r)$, т.е. задачу нахождения НОД чисел a и b сводим к задаче нахождения НОД чисел b и r. Если $b \vdots r$, то $(b, r) = r$ и $(a, b) = r$. В случае, когда при делении b на r образуется остаток r_1, то по теореме $(r, r_1) = (b, r) = (a, b)$. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получим, что предпоследний остаток делится на последний остаток. Тогда последний ненулевой остаток и есть НОД чисел a и b.

Пример. Найдем (15283, 10013).

▲ Процесс последовательного деления в алгоритме Евклида удобно выполнять в следующем виде:

$$\begin{array}{r|l} 15283 & 10013 \\ -10013 & 1 \\ \hline 5270 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10013 & 5270 \\ -5270 & 1 \\ \hline 4743 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5270 & 4743 \\ -4743 & 1 \\ \hline 527 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4743 & 527 \\ -4743 & 9 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$15283 = 1 \cdot 10013 + 5270,$$
$$10013 = 1 \cdot 5270 + 4743,$$
$$5270 = 1 \cdot 4743 + 527,$$
$$4743 = 9 \cdot 527.$$

Последний ненулевой остаток равен 527.
Поэтому (15283, 10013) = 527. ■

Упражнения

А

6.71. Найдите НОД указанных чисел с помощью алгоритма Евклида: 1) 846 и 246; 2) 1960 и 588; 3) 21120 и 30720; 4)15283 и 10013; 5) 2956 и 13302; 6) 1426 и 420.

6.72. Покажите, что числа 2939 и 3271 являются взаимно простыми.

6.73. Во сколько раз НОД (6120, 36360) больше НОД (1260, 55260)?

6.74. Вычислите: 1) (475, 570, 741); 2) (112, 124, 420); 3) (250, 320, 810, 490); 4) (660, 1080, 1200, 1500).

В

6.75. Найдите наибольшую общую меру отрезков, длины которых равны: 1) 3 м 20 см и 5 дм 4 см; 2) 7 м и 45 см; 3) 1 км 300 м и 400 м; 4) 3 км 200 м и 600 м.

6.76. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде: 1) $2k$ или $2k+1$; 2) $3k$, $3k+1$ или $3k+2$. Здесь k – неотрицательное целое число.

6.77. При делении двух данных чисел на 3 получается остаток, равный 1. Покажите, что при делении их произведения на 3 также получается остаток, равный 1.

6.78. При делении на 3 одного из двух натуральных чисел получается остаток, равный 1, а при делении второго числа на 3 получается остаток, равный 2. Покажите, что при делении их произведения на 3 получается остаток, равный 2.

6.79. При делении двух целых чисел на данное натуральное число получаются одинаковые остатки. Покажите, что разность этих целых чисел делится на данное натуральное число.

C

6.80. Докажите, что если вычесть число 1 из квадрата нечетного натурального числа, то получится число, кратное 8.

6.81. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

6.82. Покажите, что при делении квадрата нечетного числа на 4 получается остаток, равный 1.

6.83. Докажите, что если к квадрату числа, не кратного 5, прибавить 1 или отнять 1, то получим число, кратное 5.

6.84*. Докажите, что при любом натуральном k число k^3+11k делится на 6.

6.85*. Докажите, что при любом натуральном k число $k^2(k^4-1)$ кратно 60.

6.86. Докажите, что число $a^{k+4}-a^k$ делится на 30, если a и k – натуральные числа.

6.87. Покажите, что при каждом натуральном k значение многочлена k^5-5k^3+4k кратно 120.

6.88. Покажите, что при каждом нечетном x значение многочлена x^3+3x^2-x-3 делится на 48.

6.5.* ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Этот простой принцип впервые сформулировал немецкий математик Лежен Дирихле (1805–1859). Его смысл таков. В клетки, количество которых равно n, помещены не менее, чем $n+1$ кроликов. Тогда найдется клетка, в которой не менее, чем 2 кролика.

Несмотря на очевидность этого утверждения, с его помощью решаются многие сложные задачи. Из условия задачи нужно лишь удачно выявить «клетки» и в них разместить соответствующих «кроликов». Рассмотрим примеры.

Пример 1. Покажем, что из числа любых 13 учеников найдутся по меньшей мере 2 ученика, чьи месяцы рождения совпадут.

▲ Действительно, так как количество месяцев в году равно 12, то из числа любых 13 учеников найдется по крайней мере 2 ученика с одинаковыми месяцами рождения. Здесь «клетка» – 12 месяцев, «кролики» – 13 учеников. ■

Пример 2. Из любых 6 натуральных чисел найдутся 2 числа, разность которых делится на 5.

▲ При делении числа на 5 может получиться один из следующих пяти остатков: 0, 1, 2, 3, 4 («клетки»). А из данных 6 чисел («кроликов») по меньшей мере 2 дают одинаковые остатки при делении на 5, т.е. среди этих 6 чисел найдутся числа a и b, такие, что $a = 5n + r$, $b = 5m + r$ ($r = 0, 1, 2, 3, 4$). Если $n > m$, то

$$a - b = (5n + r) - (5m + r) = 5n - 5m = 5(n - m) \vdots 5. \blacksquare$$

Упражнения

В

6.89. В магазин завезли 10 коробок с яблоками трех сортов, причем в каждой коробке находятся яблоки только одного сорта. Найдутся ли 4 коробки с яблоками только одного определенного сорта?

6.90. Покажите, что среди любых 100 натуральных чисел найдутся 2, разность которых делится на 99.

6.91. Докажите, что среди любых 100 натуральных чисел найдутся 2, сумма которых делится на 197.

6.92. Сколько натуральных чисел, меньших 10, можно выбрать так, чтобы ни одно из них не было больше другого в 2 раза?

6.93. Покажите, что среди любых 100 натуральных чисел найдутся несколько чисел, сумма которых делится на 100.

6.94. Существуют ли два числа среди любых 30 натуральных чисел, не превышающих 50, таких, что одно из них больше другого в 2 раза?

6.95. В школе 25 классов, в которых учится 676 учеников. Покажите, что существует класс, в котором не менее 28 учеников.

C

6.96. Покажите, что найдется число вида 2019 2019…2019 0…0, которое делится на 2018.

6.97. Докажите, что для любого натурального n найдется число вида 11…100…0, которое делится на n.

6.98. Покажите, что существует число, оканчивающееся цифрами $2020 \cdot 10^{4n}$ и делящееся на 2019 без остатка.

6.99*. Существует ли натуральная степень числа 3, которая оканчивается цифрами 0001?

6.100. Покажите, что среди любых трех целых чисел найдутся два, сумма которых делится на 2.

6.101. Считается, что количество волос на голове человека не превышает 400 000. Докажите, что среди жителей Алматы найдутся по меньшей мере 2 человека с одинаковым количеством волос на голове.

6.102*. Внутри единичного квадрата отметили 51 точку. Докажите, что существуют три точки, лежащие в круге радиуса $\frac{1}{7}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

Раздел 0. Упражнения для повторения материала, пройденного в 7 классе.

0.1. 1) a^{16}; 5) a^{10}; 8) a^6. **0.2.** 2) 25; 4) 1; 5) 81. **0.3.** 2) $-a^5b^7$; 4) $4a$; 6) m^4n^4. **0.4.** 1) $3a^2b-ab^2$; 3) $3xy+y^2$; 5) $10p^2-18pq+8q^2$. **0.5.** 2) $5a(a^2-3ab+4b^2)$; 6) $3x^2(-2a+3-4x^2-a^2)$. **0.10.** 1) 1; 2) $\frac{4x+4}{a}$; 3) $\frac{3an-2bm}{36mn}$; 4) $\frac{5mn}{14x}$; 5) $-3abpq$; 6) $\frac{x+2y}{3}$. **0.11.** 4) $(x+y)^2(x-y)$; 5) $(a-b)^2(a-b-3)$; 6) $(m+n)^2(1-n)$. **0.13.** 1) 1; 2) $\frac{m-n}{n}$; 3) b; 4) $-x$. **0.14.** 2) $1\frac{2}{3}\approx 1{,}67$; $\alpha=0{,}00(3)$; $\beta<0{,}002$. **0.15.** 2) $-x^2$; 3) $-7x^2-14$; 6) $a+0{,}3b+1$. **0.16.** 3) mn^3; 5) $\frac{b}{9}$; 6) $\frac{4}{5}p^2qk$. **0.17.** 1) $2x^2-12$; 2) $2y^2-4$; 3) $2a^2+10a+14$; 4) $2c^2-10c+14$. **0.18.** 4) $-8c^3+10c^2+c-3$; 8) $c^3+c^2-14c-24$. **0.19.** 1) -7; 2) 1; 3) 2; 4) 2. **0.20.** 1) $(a-2)(a^2-2)$; 2) $(x+6)(x^2-2)$; 3) $c(c+1)(c^2-2)$; 4) $y^3(1-y)(1+y)$; 5) $(b+c)(a^2-bc)$; 6) $(x-y)(2x^2+y^2)$; 7) $(16a-5c)(b^2+2c^2)$; 8) $(2a-7b)(3a^2+b^2)$; 9) $(a+c)(c-2)(c+2)$. **21.** 1) 0; $-\frac{5}{6}$; 2) 0;1,6; 3) 0; 2; 4) 0; 0,2; 5) 0; $\frac{15}{8}$; 6) 0; 1. **0.22.** 1) $a^k(1+a)$; 2) $5x^3(x^k+2)$; 6) $5x^{k+1}(3x^k-5)$. **0.23.** 3) $66^3+34^3=2^3(33^3+17^3)=8\cdot(33+17)(33^2-17\cdot 33+17^2):400$. **0.25.** 8) $(x-1)^2-36$. **0.26.** 1) 1; 2) 3; 3) 100; 4) $\frac{3}{4}$. **0.27.** 1) $\frac{2-b}{5}$; 2) $-\frac{7}{3}$; 3) $-\frac{3}{8}$; 4) $\frac{x+2}{5}$; 5) $\frac{1}{3-a}$; 6) x^2; 7) $-x^4$; 8) $-b^4$; 9) $c^2(c-1)$. **0.28.** 5) $\frac{40x}{15x^2y^2}$; 7) $\frac{a^2}{a^2-2a}$. **0.29.** 1) $y-b$; 2) $x+a$; 3) $x+y$; 4) $b-3c$. **0.30.** 3) $\frac{n^2-1}{n}$; 6) $-\frac{2x^2}{(1+x)^2}$. **0.31.** 1) a^2-b^2; 4) $(c+2)^2$. **0.33.** 4) x^8x^0; 5) $x^{10}x^{-2}$. **0.34.** $n=11$. **0.35.** $n=52$. **0.36.** $a=348$. **0.45.** 1) $(a+b)^2+(a-b)^2$. **0.48.** $(a+b)^3-(a-b)^3$. **0.49.** $a=2$; $b=-7$; $c=-5$. **0.50.** 1) Один из вариантов ответа x^6+1. **0.52.** 2) $\frac{a^2+3}{a-1}$; 4) $\frac{a-b}{a+b}$. **0.53.** 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}$. **0.54.** 1) $\frac{1}{a^2+a+1}$; 4) $\frac{1}{2-p}$; 8) 0. **0.55.** 3) $\frac{20}{3}$; 4) 5.

Раздел 1

1.1. **1.4.** 1) 8; 2) 5; 3) 6; 4) 10; 9) 0,7; 10) 1,5. **1.5.** 2) 50; 7) 2,5; 10) 1,4. **1.7.** 3) Нет; 4) да. **1.8.** 2) 35; 5) 3. **1.9.** 1) 4; 2) 8; 3) 0,39; 4) 5. **1.10.** 1) ± 8; 2) ± 5; 3) $\pm 0{,}3$; 4) $\pm\sqrt{3}$. **1.11.** 1) 4; 4) 1,44; 9) 1,5. **1.12.** 3) 5; 6) 21; 8) $\frac{1}{3}$. **1.13.** 1) $x\geqslant 0$; 5) $x\geqslant 0$; 8) $x=0$. **1.14.** 3) 9; 4) 0. **1.15.** 5) $(\sqrt{7})^2$; 8) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$. **1.16.** 4) $\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$; 6) $\pm\sqrt{1{,}5}$. **1.17.** 2) 0,5; 6) 7. **1.18.** 1) a; 2) $2x$. **1.19.** 1) $|x-2|$; 3) $1-a$; 6) $|-b-6|$. **1.20.** 3) $2\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{3}-1$; 8) $a\sqrt{a}+a$. **1.22.** 1) $x\geqslant 5$; 4) $x>3$.

1.23. 2) $(b-\sqrt{2}c)(b+\sqrt{2}c)$; 3). $(\sqrt{13}\,\square\,\sqrt{12}x)(\sqrt{13}+\sqrt{12}x)$. **1.24.** 1) 2; 4) −37. **1.25.** 1) $x \geqslant 1$; 2) $x \leqslant 3$; 3) $y \in (-\infty;+\infty)$. **1.26.** 1) $\sqrt{a}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2x}-\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **1.27.** 1) $3-x^2$; 2) $-m^2$. **1.28.** 1) a^2; 2) x^2; 3) y^3; 4) $-m^3$. **1.29.** 180 тг, 220 тг.

1.2. **1.3.** 3) $0{,}8<a<0{,}9$; $0{,}83<a<0{,}84$. **1.31.** $(2{,}6)^2<7<(2{,}7)^2$. **1.33.** 3) 0,02; 0,6; 0,2. **1.34.** 2) 0,01; 4) 8,15. **1.35.** 1) $-\frac{1}{12}$; 3) $\frac{8}{3}$. **1.36.** 2) −0,5(3); 10,28(0); −17,(0); 0,1875(0). **1.37.** 3) $10{,}21(4)=\frac{9193}{900}$; $-2{,}1(12)=-2\frac{37}{330}$; 4) $0{,}(312)=\frac{104}{333}$. **1.38.** 1) $\sqrt{2112}\approx 45{,}9565$; 4) $\sqrt{0{,}2845}\approx$ $\approx 0{,}5334$. **1.39.** 1) ≈ 0,9. **1.40.** Нет. **1.41.** Да, например, $1-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. **1.45.** 1) 0,(6); 3) 9,(9)=10. **1.48.** Если $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{p}$ – данные несократимые дроби, то: 1) $mp+kn=lnp$; 2) $mp-nk=lnp$; 3) $m=l_1p$; $k=l_2n$. **1.49.** 1) $mp+kn=mk$. **1.50.** 1) ≈ 5,3; 2) 11,18. **1.53.** 1) 4,92; 2) 1,95; 3) 22,72; 4) 0,85. **1.58.** 1) *A* принадлежит; 2) *B* принадлежит; 3) *C* не принадлежит.

1.3. **1.62.** 1) 3,5; 2) 16,5; 3) 3,6; 4) 4,7. **1.63.** 2) $|x+1|<3{,}5$; 3) $|x+4{,}5|\leqslant 0{,}2$. **1.64.** $AB=12$; $AC=9$; $BC=3$. **1.65.** 2) $(-\infty;3)$; 4) $[-3;3]$; 6) $(-\infty;11]$; 7) $(-5;0]$. **1.66.** 1) $x \geqslant 2$; 3) $-2<x<0$; 5) $x \leqslant 5$; 8) $-2<x\leqslant 1$. **1.67.** 3) 8; 4) 10; 5) 15; 6) 34. **1.68.** 1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 11; 5) 16; 6) 46. **1.74.** 1) $\approx \pm 2{,}08$; 2) $\approx 1{,}32$. **1.76.** 1) $(7;+\infty)$; 3) $[0;4)$; 6) $\varnothing$. **1.77.** 2) $(-2;+\infty)$; 4) $(-\infty;15]$; 6) $(-3;0]\cup[5;+\infty)$. **1.78.** 3) $8<\sqrt{67}<9$; 5) $14<\sqrt{222}<15$. **1.80*.** Рис. 1. $OA=a$, $OB=OC=1$, $OD:OC=OC:OA \Rightarrow OD=\frac{1}{a}$. **1.82.** 3) $x\in[0;6]$; 4) $x\in(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$. **1.82.** 1) (−2; 1); 2) $(-\infty;2]\cup[5;+\infty)$; 3) $[0;6]$. **1.85.** 1) $[1;5]$; 2) $[-5;-1]$; 3) (2; 8); 4) (−2;−1). **1.86.** 1) 30 мин; 2) 15 мин; 3) 20 мин. 4) 3 мин. **1.87.** 0,6 кг. **1.88.** 1) $\frac{10}{14}$ – наименьшее; $\frac{8}{9}$ – наибольшее. **1.89.** 1) 25; 2) 10; 3) $\frac{34}{3}$; 4) $\frac{152}{7}$. **1.90.** $x\in[-8;0]$.

1.4. **1.91.** 1) 88; 2) 4,2; 5) 9; 6) 0,24. **1.92.** 1) 180; 2) 30; 3) 48; 4) 60; 5) 6; 6) 42; 7) 24; 8) 32. **1.93.** 2) 12; 5) 12; 8) 1. **1.94.** 3) 9; 7) 26; 8) 5. **1.95.** 2) $7\sqrt{2}$; 6) $15\sqrt{3}$; 9) $8\sqrt{6}$;

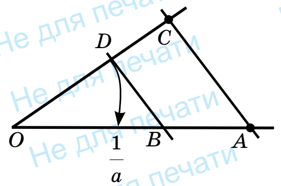


Рис. 1

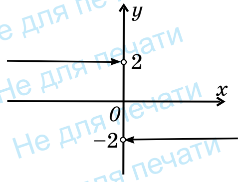


Рис. 2

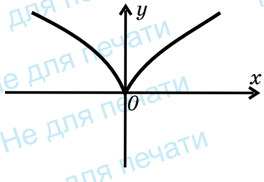


Рис. 3

12) $2\sqrt{3}$. **1.96.** 1) $\sqrt{12}$; 5) $\sqrt{2}$; 10) $\sqrt{15}$; 12) $\sqrt{7}$. **1.97.** 3) $3\sqrt{2}$; 6) 2. **1.98.** 2) $\sqrt{27}<4\sqrt{3}$; 4) $7\sqrt{2}>\sqrt{72}$. **1.99.** 1) $4x$; 3) $1{,}2\,ax^3$. **1.100.** 1) 5; 2) 9; 3) 3; 4) 3. **1.101.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 6) $x\geqslant 0$; 8) $[0;1)\cup(1;+\infty)$. **1.102.** 3) $\sqrt{0{,}1}>\sqrt{0{,}01}$; 7) $3{,}2>\sqrt{9{,}8}$. **1.103.** 1) 8,5; 2) $\frac{7}{96}$; 3) $\frac{15}{29}$; 4) $\frac{77}{135}$. **1.104.** 1) 9,1; 2) 1,08. **1.105.** 3) $x\geqslant 0$; 4) $c\leqslant 0$. **1.106.** 1) 1; 2) 4; 3) 3; 4) 1. **1.107.** 1) $8a^5b^3$; 3) **1.108.** 1) $|a|\sqrt{15}$; 3) $-c\sqrt{-3c}$; 6) $3a|a|\sqrt{2b}$; 8) $-m^3\sqrt{-5m}$. **1.109.** 2) $\sqrt{ab^3}$; 4) $-\sqrt{5x^4}$; 5) $\sqrt{-2x}$. **1.111.** 3) $8\sqrt{0{,}2}<0{,}4\sqrt{250}<\sqrt{41}$. **1.112.** 1) $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$; 3) $2x+y+3\sqrt{xy}$. **1.113.** 2) $m\sqrt{m}-n\sqrt{n}$; 4) $x^3+y\sqrt{y}$. **1.114.** 1) 4; 2) 10; 3) $4\sqrt{30}$; 4) 8. **1.115.** 3) $\sqrt{2}-\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{2{,}5}$; 7) $\sqrt{2}$; 9) $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$. **1.116.** 6) $\frac{a\sqrt{b}+b}{ab}$; 10) $0{,}25\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$. **1.117.** 2) $\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^5+1}{\sqrt{2x}+1}$. **1.118*.** 2) Рис. 2. **1.120.** 1) n. **1.121.** 1) 1; 2) 2. **1.122.** a. **1.123.** $0{,}5\left(\sqrt{-2a}+\sqrt{2-2a}\right)$. **1.124.** 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **1.126.** 2) 10; 3) −6. **1.127.** 9. **1.128.** $ab=1$. **1.129.** 1) 0; 8; 2) ± 0,5; 3) ∅.

1.5. **1.135.** 5 см. **1.136.** 1) $OA=5$; 2) $BC=5$; 3) $ED=7$; 4) $MN=10$. **1.137.** 1) $c=13$ см. 2) $b=4$ м; 3) $a=24$ м. **1.140.** 1) $a=4$; 2) $a=5$; 3) $a=5$; 4) $a=\sqrt{7}$. **1.141.** [1; 2]. **1.142.** 1) 25; 2) 121; 3) 7; 4) 12. **1.144.** 25 м. **1.145.** $AB=5$, $AC=\sqrt{26}$; $BC=\sqrt{41}$. **1.146.** $AB=\sqrt{10}$, $AC=\sqrt{50}$, $BC=\sqrt{40}\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2$. **1.147.** −5 или 11. **1.148.** 1) [0;16;] 2) [0;0016;1] 3) [625;50625]. **1.149*.** Рис. 3. **1.150.** 3) $\frac{1}{3}$. **1.152.** 1) −2,4; 2) 2,7. **1.153.** 1) $x\leqslant\frac{4}{3}$; 2) $y>5$; 3) [0;25)(25; +∞); 4) [0;+∞) **1.155.** 2 км/ч. **1.156.** $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geqslant 0$. **1.157.** 1) 3; 2) 1; 3) $\sqrt{3}-1$; 4) $2-\sqrt{2}$. **1.158.** 2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+3-\sqrt{6}\right)$; 6) $\left(n+\sqrt{m}\right)\left(m+\sqrt{n}\right)$. **1.159.** 1) $x\leqslant 0$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) ∅; 4) $m\leqslant 0{,}5$; 5) $(-\infty;+\infty)$ 6) $a\leqslant 0{,}5$. **1.160.** 2) 108; 4) $1\frac{4}{7}$. **1.161.** 3) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; 4) 1. **1.162.** 1) $8\sqrt{3}$; 3) $4\sqrt{10}$; 4) $2\sqrt{2}$. **1.163.** 1) 5; 2) 1. **1.164.** 1) $\sqrt{6}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 4) $2+\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{5}-2$; 6) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$. **1.165.** 1) $\sqrt{x+3}+2$. **1.166.** 2) $3+\sqrt{5+\sqrt{8}}<3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$. **1.167.** 1) $\sqrt{2x^3y}$. **1.168.** 2) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **1.169.** 1) 6; 2) 10. **1.170.** 3) $\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}-5\right)$; 4) $\left(\sqrt{y}-1\right)\left(2\sqrt{y}+3\right)$. **1.174.** 1) 11; 2) 2,2. **1.175.** 1) 7; 2) 9. **1.176.** 1) $\frac{m^2+n^2}{2mn}$; 2) $\frac{m^2n^2+1}{2mn}$.

Раздел 2

2.1. **2.2.** 5) $b=0$; 6) $b=c=0$. **2.3.** 3) $x^2-8x=0$; 6) $4x^2-5x+1=0$. **2.4.** 2) $x^2+20x+4=0$. **2.5.** 1) ±8; 4) $\pm\sqrt{3}$; 6) ±5; 8) $\pm\frac{4}{3}$. **2.6.** 2) 0; −1,4; 5) 0;4. **2.7.** 1) ∅; 2) ±2; 3) 0; 4) 0; $\frac{1}{3}$; 5) ∅;

6) $\varnothing$. **2.8.** 3) 0; 1,2; 4) $\pm\sqrt{3}$; 8) 0; −2. **2.9.** 2) $5x^2+2x=0$; 5) $x^2-72x+27=0$. **2.10.** 1) ±5; 2) $\pm\frac{5}{6}$; 3) ± 0,6; 6) ±1. **2.11.** 1) 0; $-\frac{14}{9}$; 2) 0; $\frac{19}{7}$; 3) 0; $\frac{20}{17}$; 4) 0; $\frac{1}{48}$. **2.12.** 1) −5; 9; 2) $-\frac{7}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{5}{3}$; −0,5; 4) −1; $\frac{1}{3}$. **2.13.** 1) 0; −17; 2) 0; −4. **2.14.** 0; 2. **2.15.** 2; 3. **2.16.** 3 м, 15 м. **2.17.** 12 см; 60 см. **2.18.** 1) ±2; 2) ±4; 3) ±4; 4) $-2\pm\sqrt{6}$. **2.19*.** 1) 0; ±3; 3) 0; ±8; 4) 0; 1; 6) 0; 3. **2.20*.** 1) 0; ±5; 2) 1; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\pm\frac{4}{3}$; 6) $\varnothing$. **2.21*.** 1) 0; 5; 2) 2. **2.22.** 1) $ax^2+bx=0$; 2) $ax^2+c=0$ $(ac<0)$; 3) $ax^2=0$. **2.24.** 1) −3; 2) ±3. **2.25.** 1 ч. **2.26.** 3) $3-2\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{8}}{3}$. **2.27.** 1) 4; 2) −4; 3) 1. **2.28.** $\begin{cases} y \leqslant x+2, \\ y \geqslant -0,5x+2. \end{cases}$

2.2. **2.29.** 1) 2; 3; 6) −0,2; 2; 7) −4; 5; 8) $x_1=x_2=0,25$. **2.30.** 2) −2; 12; 7) $x_1=x_2=1$. **2.31.** 1) −1; −0,5; 2) $\varnothing$; 3) −0,5; 4) −6;1. **2.32.** 1) $-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$; 2) $\varnothing$; 3) −6; 2,5; 6) $\frac{5}{3}$; 7) $\frac{1}{9}$; 8) 19; −8. **2.33.** 1) 2; $\frac{8}{3}$; 2) −10; 8; 3) −1; $\frac{37}{15}$; 4) 0,2; 1; 5) 3,5; 5,5; 6) −1; 23. **2.34.** 2) $5\pm5\sqrt{2}$; 4) −6; 14; 5) −9; 3. **2.35.** 1) 0; 1; 2) 0; 9; 3) 0; $\frac{2}{3}$; 4) $\pm\sqrt{1,5}$; 5) $\pm\sqrt{4,5}$; 6) 1; 10. **2.36.** 1) $x^2-3x+2=0$; 2) $x^2-9=0$; 3) $x^2+6x-40=0$; 4) $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$. **2.37.** 1) −8; 3; 2) 1,75; 4; 3) −91; 87; 4) −59; 53. **2.38.** 1) 0,2; 0,4; 2) −7; 5; 3) −0,2; 1,8; 4) $\varnothing$; 5) 25; 6) −9; 3. **2.39.** 1) 7; 2) −5; 2; 3) 0,6; 2; 4) $-\frac{3}{4}$; 2,5. **2.40.** 1) −0,6; −0,4; 2) $-\frac{10}{3}$; −3; 3) $\frac{8}{3}$; 4; 4) $-\frac{25}{11}$; −1. **2.41.** $a=8$. **2.43.** 1) $\frac{a-b}{2}$; $\frac{a+b}{2}$; 2) $\frac{1}{a}$; 2; 5) $\frac{b-a}{a+b}$; −1; 6) $\frac{b}{n}$; $\frac{a}{m}$. **2.44.** 1) $-\frac{m}{2}$; $-\frac{m}{3}$; 2) $-2a$; $2b$; 3) $-\frac{a}{7}$; $\frac{a}{8}$; 4) $-\frac{b}{a}$; $\frac{a}{b}$; 5) $-c$; $\frac{b}{2}$; 6) $\frac{m}{m-n}$; −1. **2.45.** 1) $a=-22$; $a=-10$; 2) $a=2$. **2.46.** $k=-18$. **2.47.** 1) ± 2; ±3; 2) ±5; 3) ±1; $\pm\frac{1}{3}$; 4) ±1. **2.48.** 1) 2; 4; 2) 0,5; 1,25; 3) 0,2. **2.49.** $n=5$. **2.51.** $n=8$. **2.54.** ±6. **2.55.** $\frac{1}{3}$; 3. **2.57.** $28x^2-20x+1=0$. **2.58.** $bx^2-2a\sqrt{a}x+a^2=0$. **2.60.** 9. **2.61.** 1) $x\geqslant2$; 2) $x\notin(-\infty;+\infty)$. **2.63.** 1) 2;3; 4) −1; 3; 6) −3; −9. **2.64.** 2) 1; $\sqrt{2}$; 3) $3a$; $4a$; 5) $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$. **2.65.** 1) $x^2+9x+14=0$; 4) $x^2-5x-24=0$; 9) $x^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)x-\sqrt{14}=0$. **2.66.** 2) $1\pm\sqrt{10}$; 3) −2; −1,5. **2.67.** 2) −1; −1,4; 4) −1; −3. **2.68.** 4) $x^2-6x=0$; 9) $x^2-5=0$; 10) $x^2=0$. **2.69.** 1) $x^2-6=0$; 2) $x^2-7=0$; 3) $x^2-4x-1=0$; 4) $x^2-6x+6=0$. **2.70.** 1) (2;2); 2) (−6;8); (8;−6); 3) (−2;5); (5;−2); 4) (−2;−3); (−3;−2); 5) (−6;3); (3;−6); 6) (7;8); (8;7). **2.71.** 1) 66; 2) −66; 3) −66; 4) 4354. **2.73.** $r=\pm1$. **2.75.** 1) $p=-2$; $q=-1$. **2.76.** $p=0$. **2.78** 2) $m=-3$; 3) $m=-2$. **2.79.** $0 \; a=-\frac{8}{25}$. **2.80.** 1) $-\frac{80}{3}$; 2) −3,75. **2.82.** 14. **2.83.** $\frac{2}{3}$. **2.84.** 1. **2.85.** $p=q=0$ или $p=1$, $q=-6$. **2.86.** $p=q=0$; $p=1$, $q=-2$. **2.88.** $1,25\sqrt{17}$.

2.4. **2.94.** $a=9$. **2.96.** $0<c<2$. **2.97.** 2) $(x-1)(2x-3)$; 8) $(x+11)(x-2)$; 12) $(x-1)(2x-5)$. **2.98.** 1) $c<0{,}8$; 2) $c=0{,}8$; 3) $c>0{,}8$. **2.99.** 1) $b=-\frac{13}{3}$; 2) $b\notin(-\infty;-4)\cup(4;\pm\infty)$; 3) $b=\pm 4$; 4) $b\notin(-4;4)$. **2.100.** 5) $(8x+25)(x-3)$; 9) $4\cdot\left(y-\frac{7+\sqrt{33}}{8}\right)\left(y-\frac{7-\sqrt{33}}{8}\right)$. **2.101.** 2) $(2x+m)(3x+m)$; 4) $(x+1)((m-n)x-m)$. **2.102.** 0. **2.103.** 2. **2.104.** ±1; $\pm\frac{2}{3}$. **2.105.** $k=1$. **2.106.** 1) 6; 10; 2) -2. **2.107.** 3; 4. **2.109.** 1) ±12; 3) $\frac{10\pm2\sqrt{70}}{9}$. **2.110.** 1) 0,5; 1; 2) 3; 7; 3) 0; 4) $\frac{-21\pm\sqrt{297}}{18}$. **2.111.** 1) $(-3;2)$; 2) $(4{,}5)$. **2.112.** 2) $x^2-12x=0$; 5) $x^2-x-1=0$. **2.116.** 1) ±1; ±2; 4) $\varnothing$; 6) $\pm\frac{2}{3}$. **2.117.** 2) $\varnothing$; 5) ±3; $\pm a$; 6) ±2; $\pm3a$; **2.119.** 1) 0; -1; -5; -6; 3) 4; -2. **2.120.** 2) 1; ±2; 4) -1; ±2. **2.121.** 1) -3; 1; 3) -2; -1. **2.122.** 2) $\varnothing$; 4) -3; 2; 6) -6; 1. **2.124.** 1) -3; 1; $-7\pm\sqrt{61}$; 3) $-4{,}5$; 0,1; $\frac{8}{11}$; 2,4. **2.125.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) 0. **2.126.** $x^4-5x^2+6=0$.

2.5. **2.131.** 1) 0;1; 2) 1; 3) 1; $-0{,}5$; 5) $-0{,}2$; 6) 3; 7) 1,5; 8) $\frac{2}{11}$. **2.132.** 2) -3; 7; 3) 12. **2.133.** 1) $(2{,}5;0)$; 2) $(4;0)$; $(5;0)$; 3) $(3;0)$; 4) $(0;0)$; $(4;0)$. **2.134.** 1) $(-3{,}5;-4)$; $(7;17)$. **2.136.** 4) 5. **2.137.** 1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 5; 5) -1; 0,2; 6) 2; 4. **2.138.** 1) $\frac{-3a\pm a\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{b}{6}$; $\frac{b}{2}$; 6) -1; $\frac{n+1}{n-1}$. **2.139.** 3) 0; 4) 1; $\frac{2}{3}$. **2.140.** 36 км/ч; 32 км/ч; **2.141.** 21. **2.142.** 450 м³. **2.143.** 13. **2.144.** 4 км/ч. **2.145.** 40 км/ч. **2.146.** 3 ч. **2.147.** 5 км/ч. **2.148.** 800 км/ч, 600 км/ч. **2.149.** 42 ч, 56 ч. **2.150.** 28 дней, 21 день. **2.151.** 18 ч, 24 ч. **2.152.** 10 м/с; 70 м. **2.153.** 72 га, 60 га; 108 га; 120 га. **2.154.** 25 кг. **2.155.** 5 км/ч. **2.156.** $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$. **2.158.** 1) $(1;-1)$; 2) $(2;1)$. **2.159.** 1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 2) $2+3\sqrt{5}$.

2.7. **2.161.** 1) 3; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 2; 6) 1; 7) 8; 8) 3. **2.162.** 1) $(2;-5)$; 2) $(7;5)$, $(-5;-7)$; 3) $\varnothing$; 4) $\left(\sqrt{2{,}5};\ 2-\sqrt{2{,}5}\right)$; $\left(-\sqrt{2{,}5};\ 2+\sqrt{2{,}5}\right)$. **2.163.** 2) $(6;2)$, $(-4;-3)$. **2.164.** 1) $\left(-\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right)$, $(2;9)$. **2.165.** 3) $(\pm4;\pm7)$, $(\pm7;\pm4)$ **2.166.** 1) $(4;8)$, $(8;4)$. **2.167.** 1) $(2;2)$. **2.168.** 1) $(4;9)$, $(9;4)$. **2.169.** 1) $(\pm20;\pm5)$ 2) $\varnothing$. **2.170.** 1) $(1;0)$, $(0;1)$; 3) $(2;0)$, $(0;-2)$. **2.171.** 2) $(\pm1;\pm2)$, $(\pm3{,}5;\pm0{,}5)$. **2.172.** 2) $(\pm8;\pm4)$, $(\pm7;\pm1)$ **2.173.** 1) $(-1;-1)$, $(-1;2)$; $(2;-1)$. **2.174*.** 1) $a=\pm6$; 2) $a=\pm2$. **2.175.** 2) 5; -8; 4) -2; 2,75. **2.176.** 3) $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 5) $1-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$. **2.177.** 2) $-1{,}75$; 1. **2.178.** 1) $-c$; $2c$; 2) $-6a$; a; 3) $\frac{1}{a}$; 1; 4) $\frac{1-a}{1+a}$; 1. **2.179.** 1) $a=-b$ или $a=4b$. **2.180.** $\frac{a}{b}=-\frac{1}{3}$ или $\frac{a}{b}=3$. **2.182.** 3) $\pm2\sqrt{2}$; $-1\pm\sqrt{3}$;

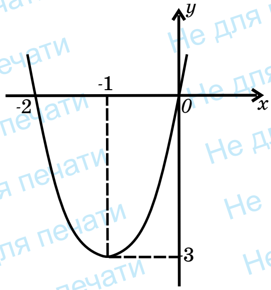


Рис. 4

Рис. 5

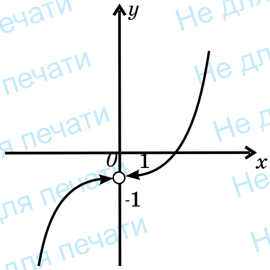


Рис. 6

4) 1; $1\frac{2}{3}$; -1; $2\frac{1}{3}$. **2.183.** 2) -2; 4) -8. **2.185.** 1) $a=-1$. **2.186.** $k=3$ или $k=4$. **2.187.** 5%. **2.188.** 32 ученика. **2.189.** 1) -4; 3. **2.190.** 1) $(\pm 2;-1)$; 2) $(\pm 1; \pm 1)$.

Раздел 3

3.1. **3.3.** 1) 9; 2) 2; 3) -1; 4) 2; 5) 5. **3.4.** 3) $(-1;\ 0)$; $(2;\ 0)$; 4) $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};1\right)$; 5) такой точки нет. **3.7.** 1) Рис. 4; 4) рис. 5. **3.9.** 2) x^2-4x+3; 3) $-x^2-6x-5$. **3.10.** 1) $2x^2+1$; 3) $-x^2+4x$. **3.11.** $p\in(-1;1)$. **3.12.** $a=1$. **3.18.** 2) Рис. 6. **3.19.** $a=3$. **3.23.** $\frac{5}{3}$ м; $\frac{8}{3}$ м; 3 м; $\frac{8}{3}$ м; $\frac{5}{3}$ м. **3.25.** $(\pm 1;\ \pm 2)$. **3.26.** 2) $-2<a-b<0$; 4) $\frac{3}{5}<\frac{a}{b}<1$.

3.2. **3.31.** 1) $(5;-2)$; $x=5$; 2) $(0;\ -1)$; $x=0$; 3) $(-1;\ 3)$, $x=-1$; 4) $(5;0)$, $x=5$. **3.35.** 1) $f(0)=1$; 2) $f(2)=-3$; 5) $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a+1}{a-1}$. **3.36.** 2) 54; 5) $(a-1)^3-10$. **3.38.** 1) $x=0$, $x=-4$; 2) $x=-1$. **3.41.** 1) $(4;\ +\infty)$ 2) $(-\infty;-1]\cup[1;3)$; 3) $[-1;1]$; 4$[-0,2;1]$. **3.42.** 24. **3.43.** 1) 7,5; 2) 1; 3) 1,5. **3.44.** 2) Рис. 7; 3) рис. 8. **3.45.** 2) $y=2+\frac{5}{x-3}$; 4) $y=-2-\frac{3}{x-2}$. **3.46.** 2) $\left(\frac{1}{3};0\right)$, $(0;0,5)$; 3) $(1,5;0)$;

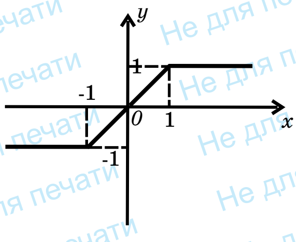


Рис. 7

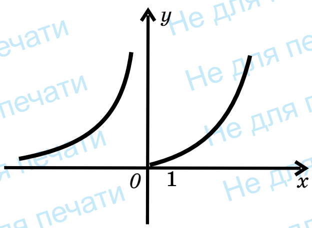


Рис. 8

(0;–1,5); 4) (0;0). **3.47.** $k=-5$; $y=2-\dfrac{5}{x-3}$. **3.48.** 2) –4. **3.49.** $P(x)=4x$.

3.50. $S(x)=\begin{cases}\left(\sqrt{2a}-x\right)^2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant x\leqslant\sqrt{2a},\\ a^2-x^2, 0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}a.\end{cases}$

Раздел 4

4.2. $M_o = 10$, $M_e = 10$, $\overline{X} = 8{,}5$ (рис. 9).
4.8. (рис. 10).

4.14. 1)

x^*	15,5	18,5	21,5	24,5
W_i	0,3	0,2	0,25	0,25
S	0,3	0,5	0,75	1

2) $M_o = 15{,}5$, $M_e = 20$, $\overline{X} = 14{,}85$ (рис. 11).

4.21. 2) $y_1 = 1$, $y_2 = -9$.

4.23. $(x-1)(x+1)(x^2+3)$.

4.24. $D = 9{,}81$, $\sigma = 3{,}13$ (4.1).
$D = 12{,}25$, $\sigma = 3{,}5$ (4.2).

4.25. $D \approx 186{,}63$, $\sigma = 13{,}66$ (4.8).

4.26. $D \approx 62{,}49$, $\sigma \approx 7{,}905$ (4.16).

4.27. $\overline{X} = 1{,}262$, $D = 0{,}142$, $\sigma = 0{,}377$.

4.33. $x^2 - 2\sqrt{5}\,x + 2 = 0$.

4.34. 1) $\dfrac{1}{4}$; 2) 3; 3) $\dfrac{1}{2}$.

4.35. A(3; 4).

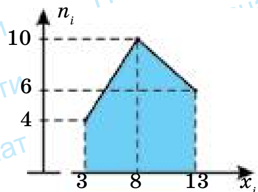


Рис. 9

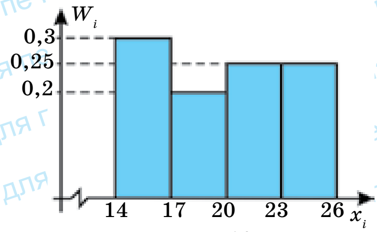


Рис. 10

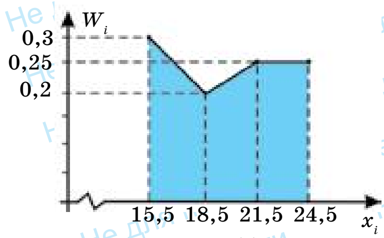


Рис. 11

Раздел 5

5.1*. **5.2.** 1) $a>b>4>0$; 3) $b<a<-12<0$. **5.3.** 2) $a-2>b-2$; 6) $-10a<-10b$. **5.4.** 3) $5<a+2<6$; 5) $1<5-a<2$. **5.5.** 2) $-80<-10x<-50$; 4) $17<3x+2<26$. **5.9.** 1) $\frac{1}{8}<\frac{1}{y}<\frac{1}{5}$. **5.12.** 8) $\frac{1}{2}-\frac{c}{c^2+1}=\frac{(c-1)^2}{c^2+1}\geqslant 0$.

5.14. 4) $a^2+b^2+2-2(a+b)=(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$. **5.15.** 2) Пусть $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)<4\Rightarrow(a+b)\frac{a+b}{ab}-4<0\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{(a+b)^2-4ab}{ab}<0\Rightarrow\frac{(a-b)^2}{ab}<0$ – противоречие $\Rightarrow(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$. **5.16.** 4) $1-a=b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$; $1-b\geqslant 2\sqrt{ac}$; $1-c\geqslant 2\sqrt{ab}\Rightarrow(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant\geqslant 8abc$. **5.17.** 5) $\sqrt{23}-\sqrt{11}=\frac{12}{\sqrt{23}+\sqrt{11}}<\frac{12}{\sqrt{22}+\sqrt{10}}=$ $=\sqrt{22}-\sqrt{10}$. **5.18.** 2) $a^2+1=|a|^2+1\geqslant 2\sqrt{|a|^2}=2|a|$. **5.20.** $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$.

5.24. Нужно применить $a+\frac{1}{2}>2\,(a\neq 1)$. **5.27.** $\begin{cases}a<b+c\\ b<a+c\\ c<a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2<ab+ac\\ b^2<ab+bc\\ c^2<ac+bc.\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc).$

5.29. 1) $(4;+\infty)$; 2) $(17;+\infty)$. **5.30.** 2 км/ч. **5.31.** $b\in(-\infty;-12)\cup(12;+\infty)$.

5.2. **5.32.** 1) $(-3;\ 3)$; 4) $(-\infty;-0,4]\cup[1,2;+\infty)$. **5.33.** 3) $(-\infty;-4)\cup(0,2;+\infty)$; 6) $(-\infty;-3,5]\cup[0,6;+\infty)$. **5.34.** 2) $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$; 5) $[-2;3]$. **5.35.** 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) $\varnothing$; 5) $[-3;-1,5]$; 6) $(-12;\ 5)$. **5.36.** 1) 1, 2, 3, 4, 5. **5.38.** 3) $[3;+\infty]$; 4) $(-\infty;2)$; 5) $(1;3)$; 6) $(1;3)$. **5.41.** 1) $\left(-7;-\frac{1}{4}\right)$; 3) $(-\infty;+\infty)$; 6) $x\neq 0,25$. **5.42.** 2) $(5;+\infty)$; 3) $[-1;+\infty)$. **5.43.** 1) $(-\infty;-2)\cup(0,5;2)$; 4) $\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right)\cup\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$. **5.44.** 1) $[-4;4]$; 2) $(-\infty;-7]\cup[9;+\infty)$; 3) $(-\infty;+\infty)$; 4) $[-9;4]$. **5.47.** 1) $(1;5)$; 3) $[-1;0]$. **5.48.** 1) $(1;\ 7)$; 2) $(-2,5;\ 4)$. **5.49.** 3) $\left[-\sqrt{3};1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right]$; 5) $(-\infty;3)\cup(-3;0]\cup[4;+\infty)$. **5.50.** 1) $(-2;\ 0)$; 2) $(0,75;+\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $[-5;0]$; 6) $\varnothing$. **5.51.** 1) $[0;2]$; 3) $[0;3]$. **5.53*.** $\varnothing$. **5.54.** $\varnothing$. **5.55.** $x\in(-\infty;+\infty)$. **5.56.** $[4;6]$. **5.57.** 1) $(-3;\ 1)$; 2) $(1;\ 4)$. **5.58.** Не равносильны; 2) равносильны. **5.59.** 1) $a\in(-\infty;0)$; 2) $a\in(-\infty;4)$; 3) $a\in(0;+\infty)$; 4) $a\in[16;+\infty)$. **.60.** 1) $a\in\left(-2\sqrt{7};2\sqrt{7}\right)$; 2) $a\in(0;4)$. **5.61.** 1) $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$. **5.62.** 1) $(1;+\infty)$; 2) $(-\infty;3)$; 3) $(-\infty;0,75]$; 4) $\left[-\frac{7}{3};1\right]$. **5.64.** 1) $\varnothing$; 2) $\left(-\frac{53}{2};-\frac{7}{16}\right)$; 3) $\left(\frac{4}{7};\frac{8}{3}\right)$. **5.65.** 1) 2; 2) 6. **5.66.** 22 или 76.

5.3. **5.67.** 1) $[-1;1]$; 4) $(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup[3;+\infty)$; 5) $[-1;6]$. **5.68.** 2) $(-\infty;2)\cup(10;+\infty)$; 3) $[-7;3)$. **5.69.** 1) $[0;3)\cup(3;6]$; 4) $(-4;\ 3)$. **5.70.** 2) $[-11;-5)$; 3) $(0;\ 6)$. **5.71.** 1) $(-2;-1)\cup(2;+\infty)$;

4) $(-1,5;0)\cup(1;2)$. **5.72.** 2) $(-1;\ 0,5)$; 3) $(-3;\ -2)$. **5.73** 1) $(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(3;+\infty)$; 4) $[-2;-1)\cup\{0\}\cup[2;3)\cup$ $\cup(3;+\infty)$. **5.74.** 2) $(-7;-4]\cup\{2\}$.; 3) $(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$. **5.75.** 1) $(-3;-2)\cup\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$; 4) $(-\infty;0,5]\cup$ $\cup\{1,5\}\cup(2,5;+\infty)$. **5.76.** 2) $(0;1)\cap(2;4)$; 3) $(-2;-1,25]\cup(-1;1)\cup[5;+\infty)$. **5.77.** 1) $(-\infty;-1,5)\cup(-1;1)\cup(4;6)$; 4) $\left(-\infty;-\dfrac{3}{7}\right)\cup(1;3)\cup(3;5)$. **5.78.** 2) $(-\infty;+2)\cup\left(2;\dfrac{7}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};+\infty\right)$; 3) $x\neq-4$; $x\neq-3$; $x\neq-2$. **5.79.** 1) $[-1;5)\cup\{8\}$; 2) $(-5;-4)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$. **5.80.** 2) $(-\infty;-2)\cup\left(-2;1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};2,5\right)$. **5.81.** 2) $[0;0,5)\cup(0,5;+\infty)$. **5.82.** 1) 21; 2) –27. **5.83.** 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. **5.84.** $[13;+\infty)$. **5.85.** 1) $(1;2)\cup(2;7)$; 2) $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$ **5.86.** 1) $[-0,5;1)\cup(1;+\infty)$; 2) $(1,25;\ 2)\cup(2;+\infty)$. **5.87.** 1) $(-9;4)\cup(4;5)$; 2) $(0;\ 0,5)$. **5.88.** 1) $(4;+\infty)$ 2) $(-\infty;-3)\cup(3;4]$ **5.89.** 1) $(-5;1)\cup\{2\}$. **5.90.** $(-\infty;-1]\cup(1;3]$. **5.91.** 1) $[4;+\infty)$; 2) $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$.

Раздел 6

6.1. **6.13.** $10a+b=3a+3b\Rightarrow 7a=2b\Rightarrow a=2;\ b=7\Rightarrow 27=\overline{ab}$. **6.14.** 36. **6.15.** 15; 24. **6.16.** 3, 4, 5, 6, 7. **6.19.** 3) Число $67^8=(67^4)^2$ оканчивается цифрой 1. **6.20.** 360; 855. **6.23.** 31, 43, 79, 67, 83. **6.30.** 240. **6.33.** Пусть $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$, где $p_1, p_2,\ldots, p_k$ – простые числа, каждый делитель числа a записывается в виде: $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k},(a\leqslant\alpha_i\leqslant n_i, i=1,2,\ldots,k)$. Числа α_i принимают различные n_1+1 значения. Тогда число a имеет $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ различных делителей. **6.35.** Если $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}$, то $\tau(a)^2=\tau\left(p_1^{2n_1}\cdot p_2^{2n_2}\right)=(2n_1+1)(2n_2+1)=81$. Итак, число 81 нужно разложить на 2 множителя: $2n_1+1=1$; $2n_2+1=81$; $2n_1+1=3$; $2n_2+1=27$; $2n_1+1=9$; $2n_2+1=9$; т.к. $n_1\neq 0$, то $2n_1+1=1$. Тогда $n_1=1$, $n_2=13$ или $n_1=4$, $n_2=4$. Поэтому $\tau\left(a^3\right)=\tau\left(p_1^{3n_1}\cdot p_2^{3n_2}\right)=(3n_1+1)(3n_2+1)=160$ или $\tau\left(a^3\right)=(3n_1+1)(3n_2+1)=13\cdot13=169$. **6.37.** $p=3$, $q=2$.

6.3. **6.43.** 2) 15; 5) 4. **6.44.** 1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 33. **6.45.** 1) 2; 2) 56; 3) 18; 4) 4. **6.51.** 1) 1; 2) 1; 3) 4; 4) 0. **6.53.** $3^3\cdot37$. **6.55.** 1) $a=55$, $b=65$; 2) $a=15$, $b=35$ или $a=35$, $b=15$; 3) $a=14$, $b=21$ или $a=21$, $b=14$; 4) $a=15$, $b=25$ или $a=25$, $b=15$; 5) $a=15$, $b=183$ или $a=183$, $b=15$; 6) $a=51$, $b=42$; 7) $a=28$; $b=32$; 8) $a=27$, $b=42$; 9) $a=65$, $b=78$. **6.58.** 3, 7, 9. **6.59.** 5, 7, 11. **6.60.** $(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1)$. См. задачу **6.33.** **6.61.** $(n^2-2n+2)(n^2+2n+1)$. **6.62.** 29 м 25 см. **6.63.** 1 ч. **6.64.** 1) 12 дней, в пятницу; 2) 15 дней, в понедельник; 3) 20 дней, в субботу; 4) 60 дней, в четверг.

6.4. **6.71.** 1) 6; 2) 196; 3) 1920; 4) 31; 5) 1478; 6) 2. **6.73.** 2 раза. **6.74.** 1) 19; 2) 4; 3) 10; 4) 60. **6.75.** 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 100 м; 4) 200 м. **6.79.** $n=kl+r,\ m=kp+r\Rightarrow n-m=k(l-p)\vdots K$. **6.85.** При делении полного квадрата на 5 остаток равен либо 0, либо 1, либо 4.

6.6. **6.90.** Существует. Имеется 99 “клеток” и 100 “кроликов”. **6.92.** 6. **6.93.** Пусть n_1, n_2, …, n_{100} – заданные числа. Рассмотрим суммы: n_1; n_1+n_2; $n_1+n_2+n_3$; …; $n_1+n_2+\ldots+n_{100}$. Если одна из сумм делится на 100, то задача решена. Если ни одна из указанных сумм не делится на 100, то найдутся по крайней мере две суммы, которые при делении на 100 дают одинаковые остатки. Тогда их разность делится на 100. **6.94.** Существуют, более того, 33 числа, не превышающие 50; и ни одно из них не превышает другое в 2 раза. **6.95.** $801=25\cdot32+1$. **6.96.** Рассмотрите числа 2019, 20192019, ..., $\underbrace{20192019\ldots2019}_{2018}$. **6.97** Рассмотрите числа 1; 11; 111; ...; $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ **6.98.** Рассмотрите числа 2020; 20202020;...; $\underbrace{20202020\ldots2020}_{2019}$. **6.99.** Рассмотрите числа 3; 3^2; 3^3; ...; 3^{10^m} $\Rightarrow 3^n-3^m \,\vdots\, 10^4 \Rightarrow 3^m(3^{n-m}-1)=10^4\cdot K$. Так как $(3^m,10^4)=1$, то $3^{n-m}-1=10^4\cdot l \Rightarrow 3^{n-m}=10^4\cdot l+1,\ l\in N$. **6.102.** Единичный квадрат разделите на 25 мелких квадратов со стороной $\frac{1}{5}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шыныбеков Абдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Абдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланович

АЛГЕБРА

Учебник для 8 класса общеобразовательной школы

Зав. редакцией *Н. Жиенгалиев*
Редактор *А. Изтлеуова*
Художественный редактор *М. Нурбеков*
Технический редактор *О. Рысалиева*
Корректор *И. Кротов*
Компьютерная верстка *А. Чагимкуловой*

ИБ № 078

Сдано в набор 17.01.2018. Подписано в печать 18.06.2018.
Формат 70х90$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ.л. 15,21. Уч.-изд.л. 8,36.
Тираж 20000 экз. Заказ №3458.

ТОО «Корпорация «Атамұра», 050000, г. Алматы, пр. Абылай хана, 75.
Полиграфкомбинат ТОО «Корпорация «Атамұра», Республика Казахстан,
050002, г. Алматы, ул. Макатаева, 41.